

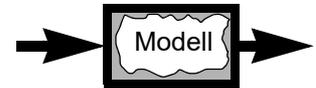
# **Modellbildung**

**und**

# **Simulation**

**Einführung in die Methoden der  
dynamischen Modellbildung und der  
numerischen Simulation mit Hilfe von  
Rechnerwerkzeugen**

---



**Lehrveranstaltung:** „Modellbildung und Simulation“

**4 Stunden (Vorlesung + Übung mit Labor)**

**Dozenten:** Prof. Dr. Wolfmüller, Prof. Dr. Kern

Die Lehrveranstaltung ist für Studierende der Technischen Studiengänge: MM, EL, MB, VU, ASE konzipiert.

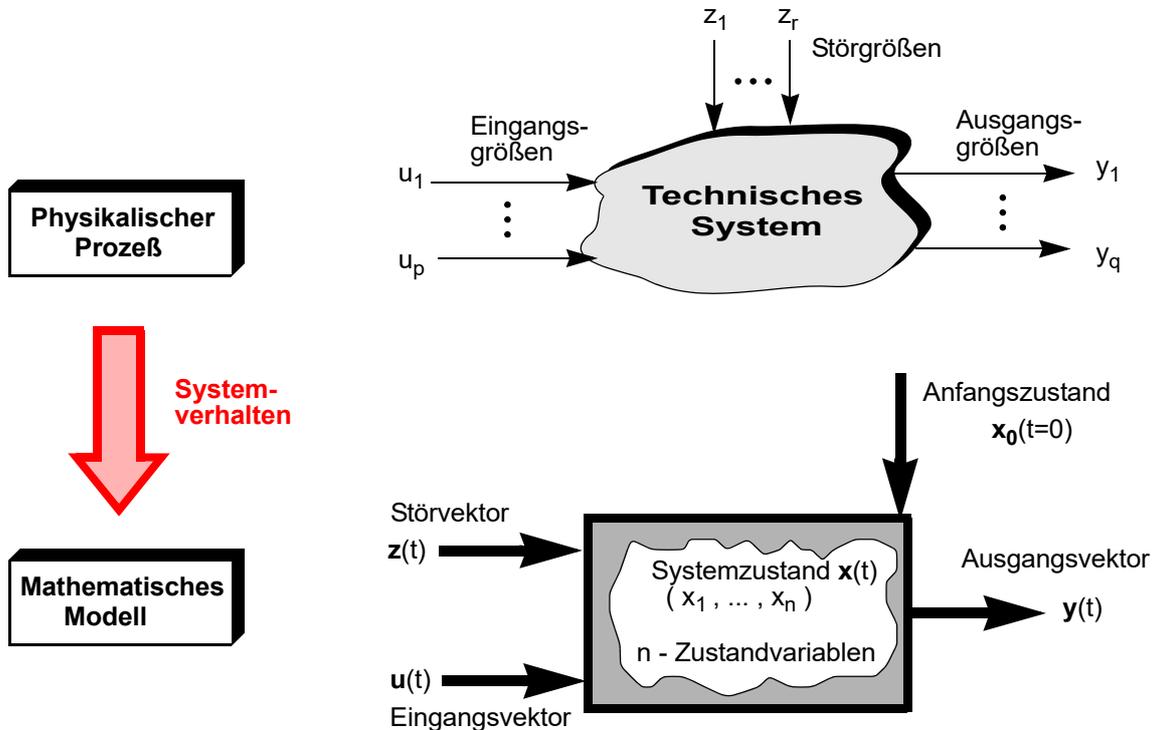
## Vorwort

Die vorliegenden Unterlagen dienen als Ergänzung zur Lehrveranstaltung „**Modellbildung und Simulation**“ (4 Std Vorlesung + Übung mit Labor), die wir für Studierende aller technischen Studiengänge an der Fachhochschule Heilbronn anbieten. Die Inhalte werden nicht in einem vollständigen Manuskript dargestellt. Es werden hier in meinem Teil der Lehrveranstaltung nur die wesentlichen Beziehungen und Zusammenhänge in einem Abstrakt zusammengefasst. Dieser Umdruck kann weder ein einschlägiges ausführliches Lehrbuch noch die Präsenz in der Lehrveranstaltung ersetzen. Es liegt lediglich eine die eigene Vorlesungsmitschrift ergänzende inhaltliche Zusammenfassung vor, die bei der Vorbereitung auf die Prüfung und für das Gesamtverständnis hilfreich sein kann.

1	Einführung .....	1
1.1	Übersicht Modellbildung .....	3
1.2	Systemdefinition .....	5
1.3	Modelldefinition.....	6
1.3.1	Mathematische Modelle in Formelsprache .....	6
1.3.2	Mathematisches Modelle im Strukturbild (Blockschaltbild) .....	6
2	Mathematische Grundlagen .....	1
2.1	Basisoperationen .....	2
2.2	Mathematische Modelle .....	3
2.2.1	Übertragungsmodell .....	3
2.2.2	Zustandsraum-Modelle.....	5
2.3	Strukturbilder .....	11
2.3.1	Übertragungsmodelle .....	11
2.3.2	Zustandsraum-Modelle.....	15
3	Netzwerkanalyse Technischer Systeme .....	1
3.1	Allgemeine Netzwerk-Ersatzmodelle .....	1
3.1.1	Bauelemente .....	1
3.2	Allgemeine Netzwerk-Analyseverfahren.....	11
3.2.1	Vollständiges Gleichungssystem .....	12
3.2.2	Knotenpotentialverfahren.....	14
3.2.3	Maschenflussverfahren.....	16
4	Technische Modelle .....	1
4.1	Elektrotechnische Modelle.....	1
4.1.1	Quellenbauelemente .....	1
4.1.2	Verbraucherbauelemente .....	2
4.1.3	Elektrische Systeme .....	5
4.2	Mechanische Modelle .....	7
4.2.1	Quellenbauelemente .....	7
4.2.2	Verbraucherbauelemente .....	7
4.3	Dynamische Modelle für Zustände in Bilanzräumen.....	10
4.4	Hydrodynamische Modelle .....	11
4.4.1	Hydrodynamische Quellen .....	14
4.4.2	Hydrodynamische Verbraucherbauelemente .....	14
4.5	Thermische Systeme .....	20
4.5.1	Thermische Quellen .....	21
4.5.2	Thermische Verbraucherelemente .....	22

## 1 Einführung

### Modellbildung eines Technischen Systems



#### Begriffe:

#### „ Modellbildung “

Vorgang zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines Technischen Systems mit Hilfe eines mathematischen Modells unter Benutzung von Formelsprache und grafischer Symbolik.

Technische Systeme können sein:

- Anlagen, Geräte und/oder Komponenten aus dem gesamten naturwissenschaftlich technischen Umfeld wie z.B. der Mechanik, der Elektrotechnik, der Verfahrenstechnik, u.s.w. ...

#### „ Simulation “

Bestimmung bzw. Ermittlung des zeitlichen Verhaltens des Systems mit Hilfe der Lösungsoperationen des Modells und der Nutzung eines Werkzeugs auf einem Digitalrechner ( ==> Software-Werkzeuge z.B.: MATLAB/Simulink, Maple, u.a.)

**Ziele** der **Modellbildung und Simulation** in der Ingenieurpraxis sind:

- **Modellgestützte Entwürfe** für Technische Systeme zur Struktur- und Parameteroptimierung

**Vorteile:** (Bei der Durchführung von Entwicklungsprojekten)

- Verbesserung des Verständnisses des Systems bzw. des Prozesses
- Modelle sind hilfreich bei der Realisierung von Anlagen, Komponenten und Prozessen.
- Vor der Realisierung sind die Eigenschaften und das Verhalten des Entwicklungsobjektes vorherbestimmbar und weitgehend bekannt.
- Modelle können zur Schulung und Ausbildung benutzt werden. (==> Simulatoren)
- Modelle sind hilfreich zur Optimierung des Kostenaufwands (Entwicklungszeit, Materialaufwand, Fertigung, Aufbau, Inbetriebnahme) bei bestmöglicher Produktqualität.

==> „**Wettbewerbsvorteile**“ am Produkte- und Arbeitsmarkt.

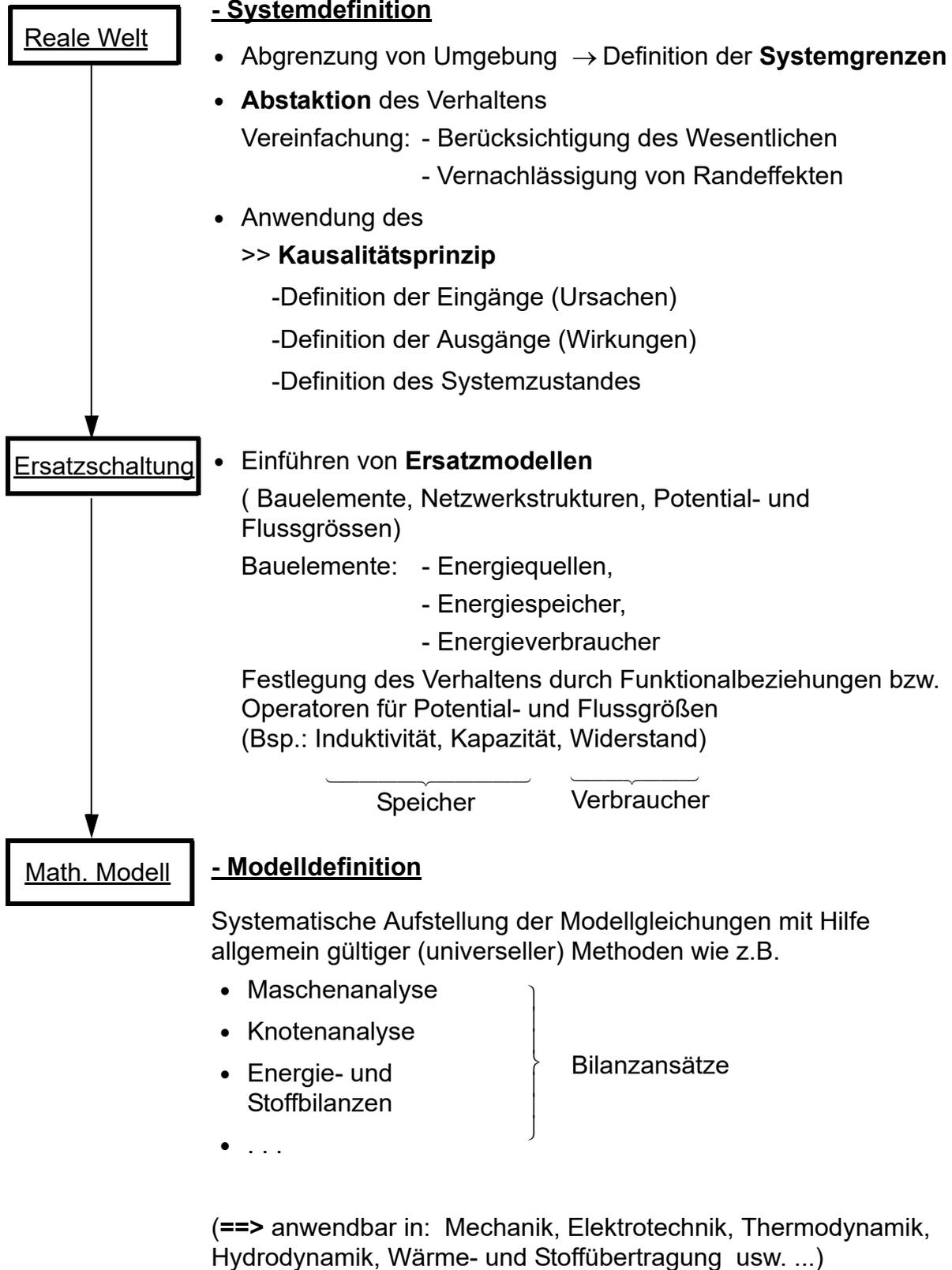
**Lernziele:** (Studium und Ausbildung)

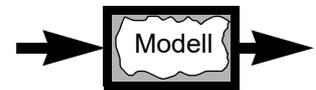
- Vermittlung des methodischen und faktischen Wissens der Modellbildung und Simulation, insbesondere unter dem Aspekt der Überwindung von Fachbereichsgrenzen.
- Erzeugung eines integralen Technikverständnisses durch disziplinübergreifende vernetzte Denkweise.

==> **Kompetenz durch Verständnis** interdisziplinär anwendbarer Methoden und Verfahren.

## 1.1 Übersicht Modellbildung

Der Vorgang der Modellbildung erfolgt in mehreren Schritten.





## Kausalitätsprinzip

**Ursachen** (unabhängig, eingeprägt)

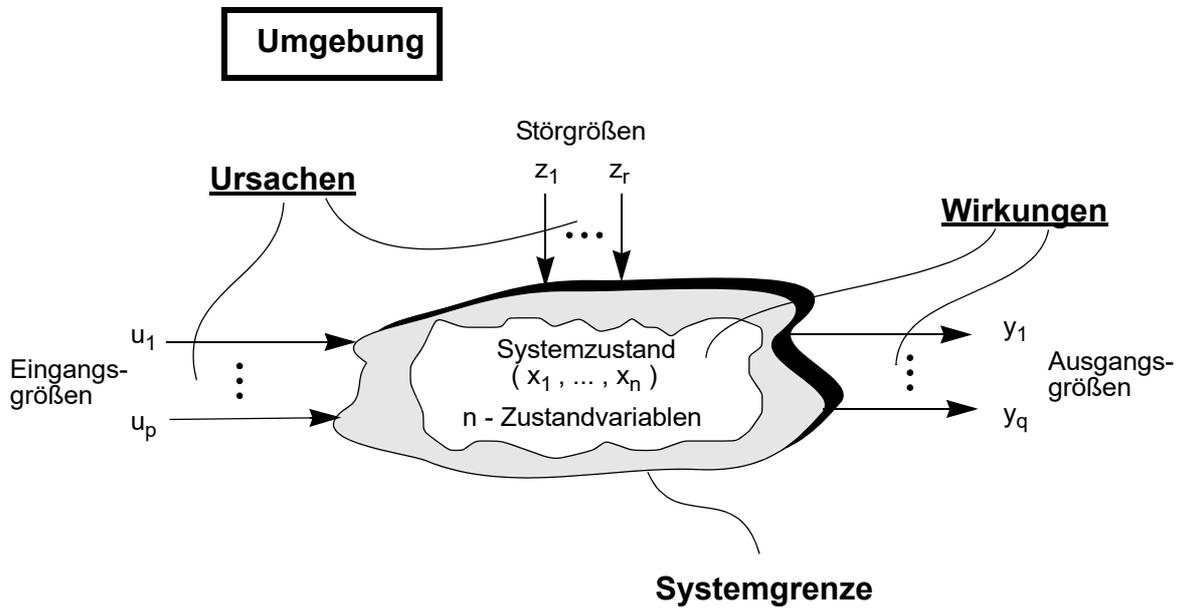
- Eingangsgrößen  $u_i(t)$   $i = 1, \dots, p$  (p Anzahl der Eingangsgrößen)  
(bekannt deterministisch)
- Störgrößen  $z_i(t)$   $i = 1, \dots, r$  (r Anzahl der Störgrößen)  
(unbekannt, stochastisch → zufällig)

**Wirkungen** (abhängig von: - Ursachen

- Systemfunktionen {Modellgleichungen} )

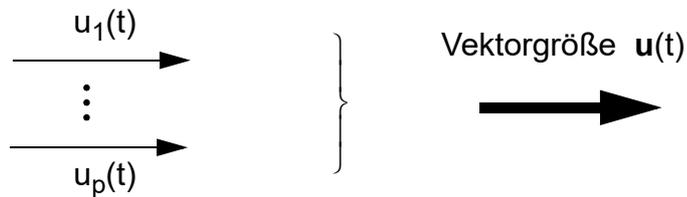
- Zustandsgrößen  $x_i(t)$   $i = 1, \dots, n$  (n Anzahl der Zustandsgrößen)  
(innere Systemgrößen repräsentieren die inneren unabhängigen  
Energiefreiheitsgrade)  
Anzahl n entspricht der Systemordnung
- Ausgangsgrößen  $y_i(t)$   $i = 1, \dots, q$  (q Anzahl der Ausgangsgrößen)  
(in äußerer Umgebung wirksam, verfügbar, sichtbar, wahrnehmbar,...)

## 1.2 Systemdefinition



Einführung von **Vektorgrößen** und **grafischen Symbolen**

Einzelgrößen z.B.:



### Klassifikation von Systemen

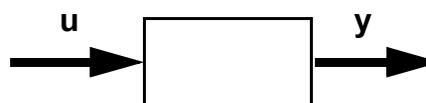
**SISO-System**      Eingrößensystem

(**S**ingle **I**nput, **S**ingle **O**utput)



**MIMO-System**      Mehrgrößensystem

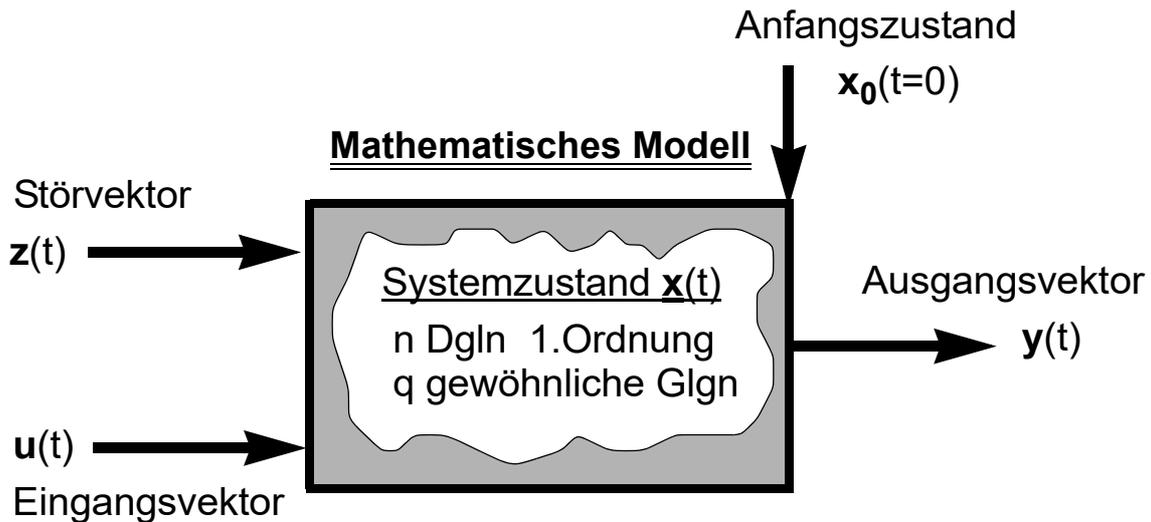
(**M**ultiple **I**nput, **M**ultiple **O**utput)



## 1.3 Modelldefinition

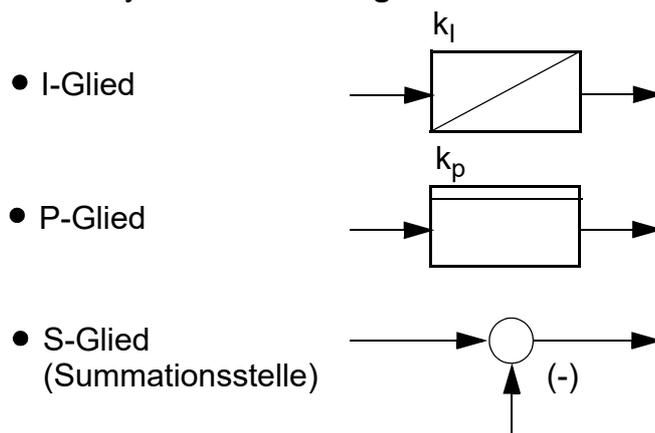
### 1.3.1 Mathematische Modelle in Formelsprache

Aufstellung von **Differenzialgleichungen** und **gewöhnlichen Gleichungen** für Zustands- und Ausgangsgrößen als Funktion der Eingangs- und Störgrößen sowie den Funktionalbeziehungen, die das Systemverhalten beschreiben. Es ist immer noch zusätzlich ein definierter **Anfangszustand** vorzugeben.

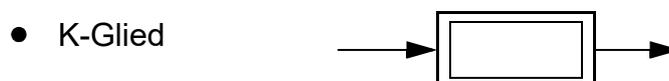


### 1.3.2 Mathematische Modelle im Strukturbild (Blockschaltbild)

→ **Grafisches Modell** mit Symbolen: **Wirkungslinien** und **Funktionsblöcken**

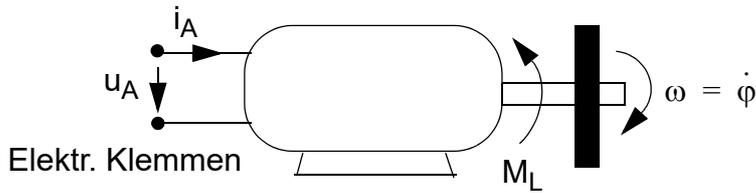


Bei Nichtlinearitäten ist zusätzlich der Kennlinien-Block notwendig



Strukturbildes wird aus Basisbauelementen und Koppelplan der Dgln erstellt.

Beispiel: **DC-Motor** mit mechanischer Last



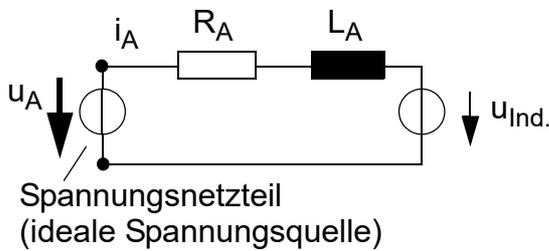
$u_A$  Klemmenspannung  
(Ankerspannung)

$M_L$  Lastmoment

$\omega = \dot{\varphi}$  („Drehzahl“)  
Winkelgeschwindigkeit

## Ersatzschaltung

elektrisch (Wicklung)



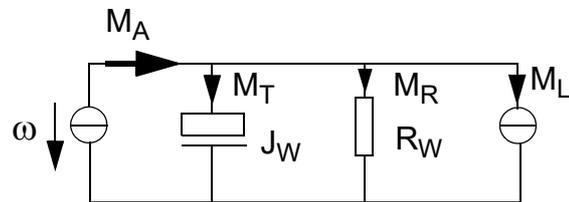
$R_A$  Ankerwiderstand

$L_A$  Ankerinduktivität

$i_A$  Ankerstrom

$u_{Ind.}$  Induzierte Spannung

mechanisch (Welle)



$M_A$  Ankermoment

$J_W$  Wellenträgheitsmoment

$R_W$  Reibkonstante

(dynam. Lagerreibung)

## Bestimmung der System-/Modellgrößen:

Eingangsgröße:  $u_A$

Störgröße:  $M_L$

Ausgangsgröße:  $\omega$

Zustandsgrößen:  $i_A, \omega$

## Aufstellung der Gleichungen:

Elektrisches System:

Mechanisches System:

Maschensatz:

Knotensatz:

$$u_A - u_{RA} - u_{LA} - u_{Ind} = 0 \quad (1)$$

$$M_A - M_T - M_R - M_L = 0 \quad (2)$$

Gleichungen der Ersatzbauelemente:

$$u_{RA} = R_A \cdot i_A$$

$$M_T = J_W \cdot \dot{\omega} \quad \text{Trägheitsmoment}$$

$$u_{LA} = L_A \cdot \dot{i}_A$$

$$M_R = R_W \cdot \omega \quad \text{Reibmoment}$$

Koppelgleichungen (→ Quellen)

$$u_{Ind} = k_M \cdot \omega$$

$$k_M = c \cdot \Phi \quad \text{Motorkonstante (Flußkonstante)}$$

$$M_A = k_M \cdot i_A$$

aus (1):

aus (2):

$$u_A - R_A \cdot i_A - L_A \cdot \dot{i}_A - k_M \cdot \omega$$

$$k_M \cdot i_A - J_W \cdot \dot{\omega} - R_W \cdot \omega - M_L = 0$$

Dgl. für Ankerstrom

Dgl. für Drehzahl

$$\dot{i}_A = -\frac{R_A}{L_A} \cdot i_A - \frac{k_M}{L_A} \cdot \omega + \frac{1}{L_A} \cdot u_A$$

↑  
Eingangsgröße u

$$\dot{\omega} = -\frac{R_W}{J_W} \cdot \omega + \frac{k_M}{J_W} \cdot i_A - \frac{1}{J_W} \cdot M_L$$

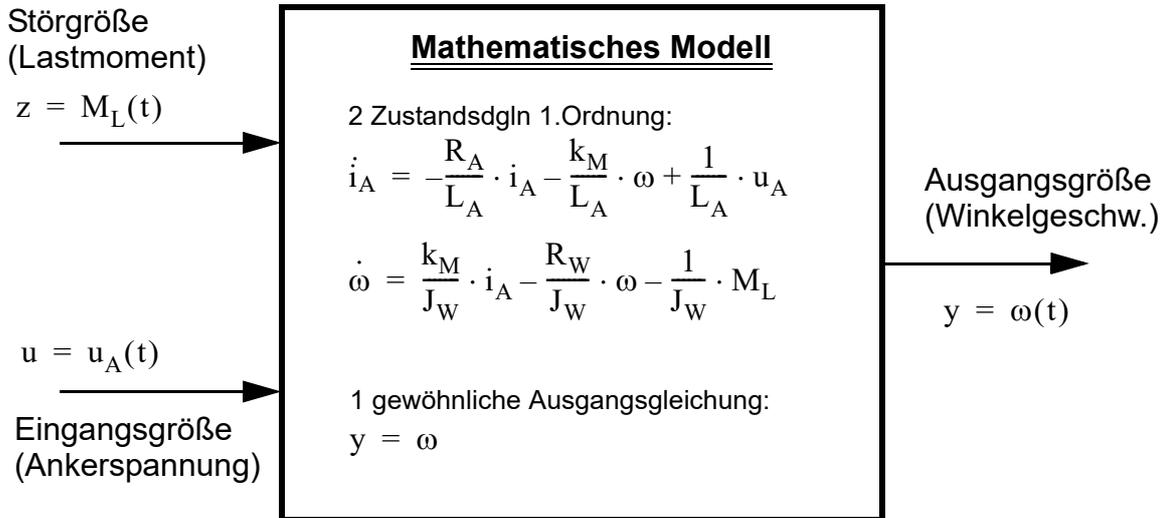
↑  
Störgröße z

==> Zwei gekoppelte Differenzialgleichungen 1. Ordnung für Zustandsgrößen  $i_A, \omega$

==> Eine gewöhnliche Gleichung für Ausgangsgröße

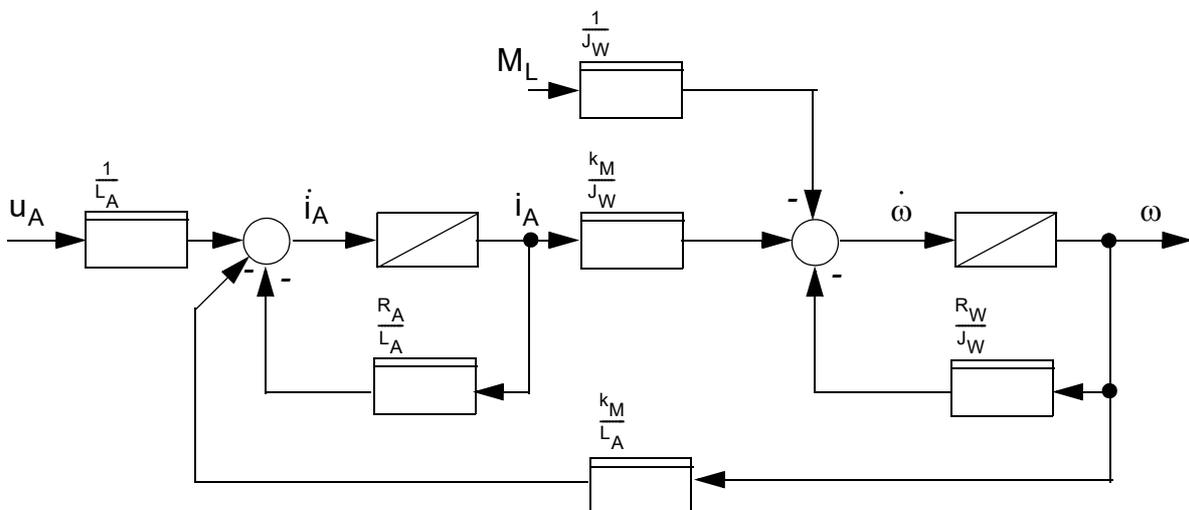
$$y = \omega$$

## Mathematisches Modell des **DC-Motors** in Formelsprache



## Mathematisches Modell des **DC-Motors** im Strukturbild (Grafisches Modell)

Strukturbild entspricht dem Koppelplan gemäß des Modells in Formelsprache. Entspricht direkt der Programmiervorschrift für grafische Simulationswerkzeuge (z.B.:MATLAB/Simulink).



## Strukturbild des Gleichstrommotors

## 2 Mathematische Grundlagen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das Verhalten von Systemen in Modellen mathematisch darzustellen:

- Formelsprache
  - ↳ Übertragungsmodell
  - ↳ Zustandsraum-Modell
- Grafische Symbolsprache - Strukturbild-Modell

Dies gilt sowohl für eine Darstellung im Zeitbereich als auch im Frequenz- bzw. komplexen Bildbereich.

### - Übertragungsmodell

stellt das Ein-Ausgangsverhalten explizit dar.

Innerer Systemzustand ist nur implizit in den Ableitungen des Ausgangs enthalten.

### - Zustandsraum-Modell (Energiezustand)

stellt den inneren Systemzustand explizit dar.

Umfassendste Art der Systemdarstellung.

### - Strukturbild (Blockschaltbild)

Operatoren und Systemgrößen werden durch Symbole repräsentiert. Sind besonders geeignet, um innere Abhängigkeiten und Kopplungen darzustellen.

Voraussetzung zur Nutzung grafischer Simulationswerkzeuge und zur Durchführung von Strukturmaßnahmen.

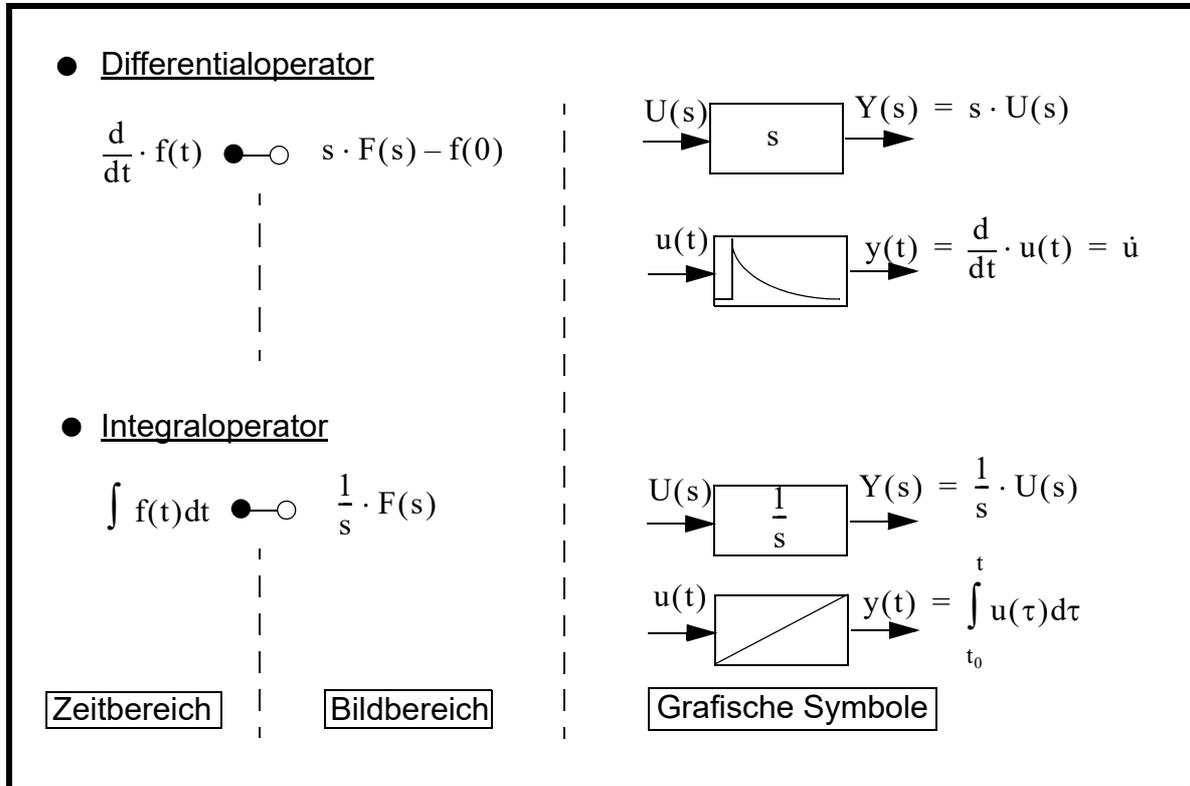


#### **Einschränkung:**

Nichtlineare Systeme können grundsätzlich nur im Zeitbereich geschlossen dargestellt werden.

## 2.1 Basisoperationen

Es gibt in der Mathematik 2 Basisoperationen, um Zeitveränderungen in Formelsprache auszudrücken.



### Praktische Anwendung

- Modelle in Formelsprache werden durch ausschließliche Verwendung des Differentialoperators gebildet. Damit wird der Veränderungszustand zu jedem Zeitpunkt direkt ausgedrückt. Es entstehen reine Differentialgleichungen.
- In Lösungsschritten sind Differentialoperatoren in der Praxis grundsätzlich zu vermeiden, da nie auszuschließende Störungen immer frequenzabhängig verstärkt werden.
- Lösungsmodelle wie z.B. Strukturbilder sind immer konsequent nur mit Integraloperatoren zu realisieren, da Lösungsalgorithmen stabiler sind und auftretende hochfrequente Störungen durch Mittelwertbildung ausgeglichen werden.

## 2.2 Mathematische Modelle

### 2.2.1 Übertragungsmodell

a.) Zunächst SISO-Modell (Eingrößenmodelle)

$p = 1, q = 1$  Systemordnung  $n > 0$  (beliebig)

$m \leq n$  (kausal)

Übertragungs-Differenzialgleichung



$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y = b_m \cdot u^{(m)} + \dots + b_1 \cdot \dot{u} + b_0 \cdot u$$

Homogene Dgl.

Inhomogenität (Anregung)

Systemparameter:

$a_0, \dots, a_n$

(Systemeigenschaften)

$b_0, \dots, b_m$



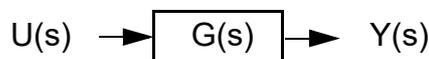
$$a_n \cdot s^n \cdot Y(s) + \dots + a_1 \cdot s \cdot Y(s) + a_0 \cdot Y(s) = b_m \cdot s^m \cdot U(s) + \dots + b_1 \cdot s \cdot U(s) + b_0 \cdot U(s)$$

$$(a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0) \cdot Y(s) = (b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0) \cdot U(s)$$

==> KÜF: Komplexe Übertragungsfunktion  $G(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$$

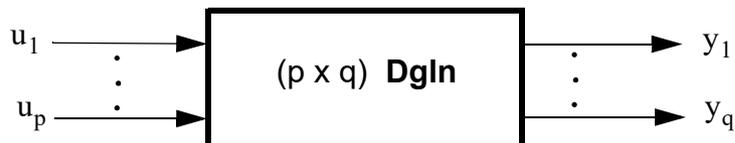
Übertragungsblock



b.) MIMO-Modelle (Mehrgrößenmodelle)

Anzahl der Eingänge  $p$   $n_{ij} > 0$   $i = 1, \dots, q$

Anzahl der Ausgänge  $q$   $m_{ij} \leq n_{ij}$   $j = 1, \dots, p$



Für die  $i, j$ -te **Übertragungs-Differenzialgleichung** gilt:

$$a_{n_{ij}} \cdot y_i^{(n_{ij})} + \dots + a_{1_{ij}} \cdot \dot{y}_i + a_{0_{ij}} \cdot y_i = b_{m_{ij}} \cdot u_j^{(m_{ij})} + \dots + b_{1_{ij}} \cdot \dot{u}_j + b_{0_{ij}} \cdot u_j$$



==>  $i, j$ -te **Übertragungsfunktion**  $G_{ij}(s)$

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} = \frac{b_{m_{ij}} \cdot s^{m_{ij}} + \dots + b_{1_{ij}} \cdot s + b_{0_{ij}}}{a_{n_{ij}} \cdot s^{n_{ij}} + \dots + a_{1_{ij}} \cdot s + a_{0_{ij}}}$$

==> **KÜM: Komplexe Übertragungsmatrix**  $G(s)$  und die Ausgangsgleichung

komplexer Ausgangsvektor

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1p}(s) \\ \dots & & \dots \\ G_{q1}(s) & \dots & G_{qp}(s) \end{bmatrix} U(s)$$

komplexer Eingangsvektor

## 2.2.2 Zustandsraum-Modelle

Änderung des inneren (Energie-)Zustands wird explizit beschrieben durch Zustandsdifferentialgleichungen. Die in äußerer Umgebung wirksamen Ausgangsgrößen werden bestimmt durch gewöhnliche algebraische Ausgangsgleichungen.

### a.) Nichtlineare Zustandsraum-Modelle

#### Nichtlineare Zustandsgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \text{Zustandsdgl. n-ter Ordnung (Systemfunktion)}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad q \text{ Ausgangsgleichungen (Ausgangsfunktion)}$$

Nichtlineare Zustandsgleichungen sind allgemeinste Modellbeschreibung von Systemen mit konzentrierten Parametern.



Keine Matrizendarstellung bei Nichtlinearen Modellen möglich !

### b.) Lineare Zustandsraum-Modelle

Werden die Zustandsgleichungen aus einer Linearkombination der Zustands- und Eingangsgrößen gebildet, lassen sie sich in Matrizenschreibweise kompakt darstellen. (Es gilt das Verstärkungs- und Überlagerungsprinzip.)

#### Lineare Zustandsgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad \text{lineare Zustandsdgl. n-ter Ordnung (Systemfunktion)}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \quad q \text{ Ausgangsgleichungen (Ausgangsfunktion)}$$

$\mathbf{A}(n \times n)$  - Systemmatrix

$\mathbf{B}(n \times p)$  - Eingangsmatrix

$\mathbf{C}(q \times n)$  - Ausgangsmatrix

$\mathbf{D}(q \times p)$  - Durchgangsmatrix

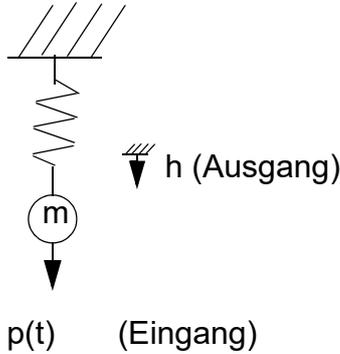
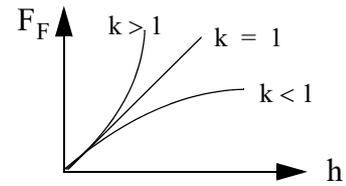
n Systemordnung

p Anzahl der Eingangsgrößen

q Anzahl der Ausgangsgrößen

Beispiele:

zu a.) Nichtlineare Feder



Federkraft:  $F_F = k_C \cdot h^k \quad k \neq 1$

Trägheitskraft:  $F_T = m \cdot \ddot{h}$

Gewichtskraft:  $F_G = m \cdot g$

Übertragungsmodell

$$\sum F_i = 0 \quad \implies \quad -F_T - F_F + p(t) + F_G = 0$$

$$m \cdot \ddot{h} + k_C \cdot h^k = p(t) + m \cdot g$$

Zustandsmodelle

Formale Vorgehensweise:

$$x_1 = h$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{h}$$

Einsetzen in Dgl.:

$$m \cdot \dot{x}_2 + k_C \cdot x_1^k = p(t) + m \cdot g$$

NL - Zustandsraummodell

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Zustandsdgl allgemein:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_C}{m} \cdot x_1^k + \frac{1}{m} \cdot p(t) + g$$

$$y = x_1$$

Ausgangsglg allgemein:  $y = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$

zu b.) DC-Motor

Matrizenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_A \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_A}{L_A} & -\frac{k_M}{L_A} \\ \frac{k_M}{J_W} & -\frac{R_W}{J_W} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_A \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_A + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_W} \end{bmatrix} \cdot M_L \quad \text{Lineare Zustandsgln}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u + \mathbf{b}_z \cdot z \quad \text{bzw.:} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{b}_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ M_L \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{u}^*$$

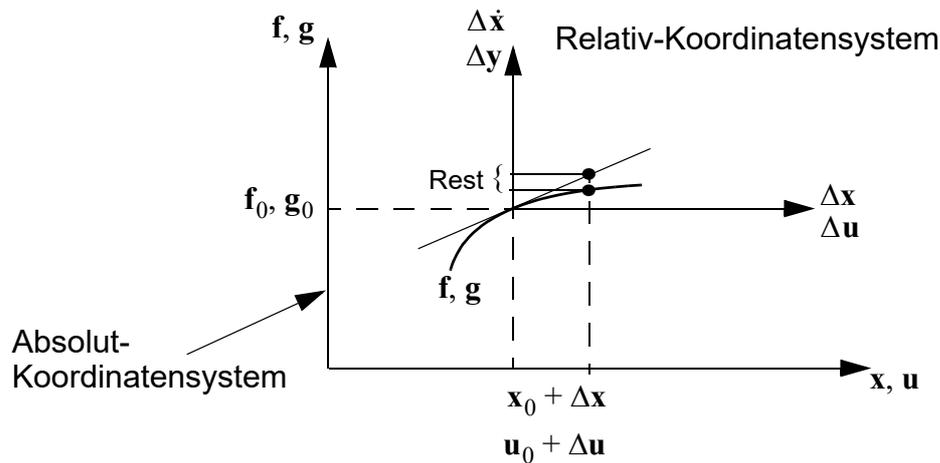
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ M_L \end{bmatrix} \quad \text{Lineare Ausgangsglg}$$

$$y = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{u}^*$$

## 2.2.2.1 Linearisierte Modelle

Linearisierung um einen Betriebspunkt (z.B.: Ruhelage  $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$  mit  $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ )

Taylor-Reihenentwicklung um Betriebspunkt



~~$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0 + \Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot \Delta \mathbf{u} + \text{Rest}$$~~

Übergang zu Abweichung:

Rest « für  $\Delta x$  « : Rest  $\Rightarrow$  0

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot \Delta \mathbf{u}$$

**Linearisierte Zustandsdgl.**

Beschreibt die zeitliche Änderung der Abweichung vom Betriebspunkt.  
Entsprechende Behandlung der Ausgangsgleichung:

$$\Delta \mathbf{y} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \cdot \Delta \mathbf{u}$$

**Linearisierte Ausgangsgleichung**

Ausführlich in Matrixschreibweise:

## Linearisierte Zustandsgleichung

$$\Delta \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{x_0, u_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{x_0, u_0} \end{bmatrix} \cdot \Delta \underline{x} + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right|_{x_0, u_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \right|_{x_0, u_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right|_{x_0, u_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \right|_{x_0, u_0} \end{bmatrix} \cdot \Delta \underline{u}$$

Allgemein:  $\Delta \dot{\underline{x}} = \mathbf{A} \cdot \Delta \underline{x} + \mathbf{B} \cdot \Delta \underline{u}$  .

## Linearisierte Ausgangsgleichung

$$\Delta \underline{y} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} & \dots & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right|_{x_0, u_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial g_q}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} & \dots & \left. \frac{\partial g_q}{\partial x_n} \right|_{x_0, u_0} \end{bmatrix} \cdot \Delta \underline{x} + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \right|_{x_0, u_0} & \dots & \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_p} \right|_{x_0, u_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial g_q}{\partial u_1} \right|_{x_0, u_0} & \dots & \left. \frac{\partial g_q}{\partial u_p} \right|_{x_0, u_0} \end{bmatrix} \cdot \Delta \underline{u}$$

Allgemein:  $\Delta \underline{y} = \mathbf{C} \cdot \Delta \underline{x} + \mathbf{D} \cdot \Delta \underline{u}$  .

Beispiel: **Linearisiertes Modell** der nichtlinearen Feder

Ruhelage für Eingang:  $p_0(t) = 0$  angenommen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad \text{aus Dgln.:} \quad 0 = x_2 \rightarrow x_{2,0} = v_0 = 0$$

$$\implies 0 = -\frac{k_C}{m} \cdot x_1^k + g$$

$$\implies x_{1,0} = h_0 = \left(\frac{m \cdot g}{k_C}\right)^{\frac{1}{k}} \quad \underline{\text{Ruhelage}}$$

Linearisiertes Zustandsraum-Modell in Matrixschreibweise

Zustandsdifferenzialgleichung:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_C \cdot k}{m} \cdot x_{1,0}^{k-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot p(t) \quad , \quad \Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \Delta u .$$

Linearisierte Ausgangsgleichung:

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{x} \quad , \quad \Delta y = \mathbf{c}^T \cdot \Delta \mathbf{x} .$$

## 2.3 Strukturbilder

Grafisches mathematisches Modell mit den elementaren Basiselementen P-, I-, S- und K-Glied.

### 2.3.1 Übertragungsmodelle

Übertragungsdifferenzialgleichung (1)

$$1 \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y = b_m \cdot u^{(m)} + b_{m-1} \cdot u^{(m-1)} + \dots + b_1 \cdot \dot{u} + b_0 \cdot u$$

$a_n = 1$

wichtig: Diese Normierung ist immer möglich !  $m \leq n$

Formale Einführung von Zustandsgrößen

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 \qquad \dot{x}_1 = x_2$$

$$x_3 = \ddot{y} = \dot{x}_2 \qquad \dot{x}_2 = x_3$$

$$x_4 = \overset{\cdot}{\ddot{y}} = \dot{x}_3 \qquad \dot{x}_3 = x_4$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$x_n = y^{(n-1)} = \dot{x}_{n-1} \qquad \dot{x}_{n-1} = x_n$$

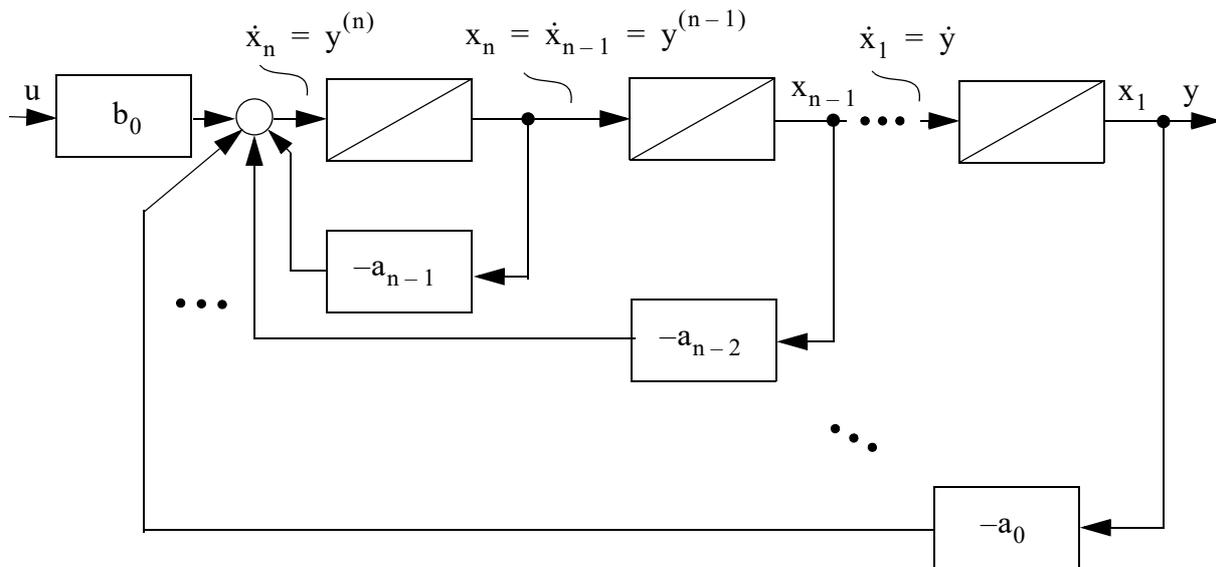
$$\dot{x}_n = y^{(n)} \text{ mit (1):} \qquad \dot{x}_n = -a_0 \cdot x_1 - a_1 \cdot x_2 - \dots - a_{n-1} \cdot x_n + \sum_{v=0}^n b_v \cdot u^{(v)}$$

Für  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$  (d.h. Eingang  $u$  ist frei von Ableitungen!) gilt:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \cdot u \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot u \qquad y = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} + d \cdot u$$

==> Strukturbild



- Vorteil: Zustandsgrößen sind physikalisch aus dem Ausgang und dessen Ableitungen interpretierbar
- Nachteil: Bei sprungförmigen Eingangsgrößen ist Ansteuerung am Eingang nicht mehr realisierbar, wenn der Eingang  $u$  zur vollständigen Anregung differenziert werden muss. ( $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, \dots$ )

=> Es lassen sich damit alle reinen Verzögerungsglieder n-ter Ordnung (PT<sub>n</sub>-Glieder) im Strukturbild darstellen.



Treten Ableitungen des Eingangs  $u$  auf, muß die Wahl der Zustandsgrößen anders erfolgen:

$$\text{Aus: } Y(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + \dots + b_n \cdot s^n}{N(s)} \cdot U(s)$$

$$= b_0 \cdot \underbrace{\frac{1}{N(s)} \cdot U(s)}_{X_1(s)} + b_1 \cdot \underbrace{\frac{s}{N(s)} \cdot U(s)}_{X_2(s)} + \dots + b_{n-1} \cdot \underbrace{\frac{s^{n-1}}{N(s)} \cdot U(s)}_{X_n(s)} + b_n \cdot \frac{s^n}{N(s)} \cdot U(s)$$

$$= b_0 \cdot X_1(s) + b_1 \cdot X_2(s) + \dots + b_{n-1} \cdot X_n(s) + b_n \cdot s \cdot X_n(s)$$

$$s \cdot X_1(s) = X_2(s)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$s \cdot X_2(s) = X_3(s)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 = \ddot{x}_1$$

...

...

$$s \cdot X_{n-1}(s) = X_n(s)$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n = x_1^{(n-1)}$$

$$\implies \dot{x}_n = x_1^{(n)}$$

$$\text{Aus } X_1(s) = \frac{1}{N(s)} \cdot U(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \cdot U(s)$$

$$\implies s^n \cdot X_1(s) + a_{n-1} \cdot s^{n-1} \cdot X_1(s) + \dots + a_1 \cdot s \cdot X_1(s) + a_0 \cdot X_1(s) = U(s)$$

$\implies$  Zeitbereich:

$$x_1^{(n)} + a_{n-1} \cdot x_1^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{x}_1 + a_0 \cdot x_1 = u$$

$$\dot{x}_n + a_{n-1} \cdot x_n + \dots + a_1 \cdot x_2 + a_0 \cdot x_1 = u$$

$$\dot{x}_n = -a_0 \cdot x_1 - a_1 \cdot x_2 - \dots - a_{n-1} \cdot x_n + u$$

$$\text{Ausgang: } y(t) = b_0 \cdot x_1 + b_1 \cdot x_2 + \dots + b_{n-1} \cdot x_n + b_n \cdot \dot{x}_n$$

$$y(t) = (b_0 - a_0 \cdot b_n) \cdot x_1 + (b_1 - a_1 \cdot b_n) \cdot x_2 + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_n) \cdot x_n + b_n \cdot u$$

Matrizenschreibweise:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} & \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u$$

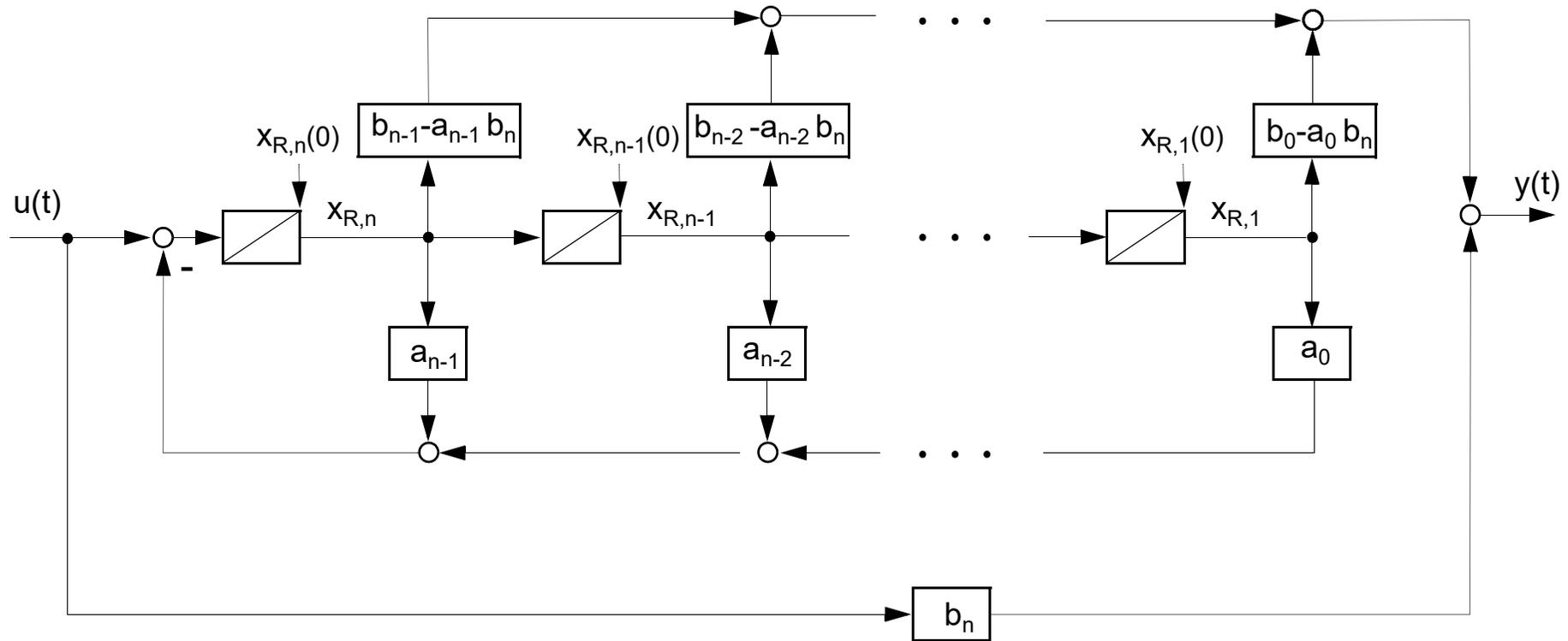
$$y = [b_0 - a_0 \cdot b_n, b_1 - a_1 \cdot b_n, \dots, b_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_n] \cdot \mathbf{x} + b_n \cdot u \qquad y = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} + d \cdot u$$

$\implies$  spezielle Struktur: Regelungsnormalform (RNF) (s. Seite 14)

Vorteil: - Es entsteht einfache Modellstruktur  
 - Keine Einschränkungen bei auftretenden Eingangsableitungen solange das System kausal ist.

Nachteil: - Zustandsgrößen sind nicht mehr physikalisch interpretierbar

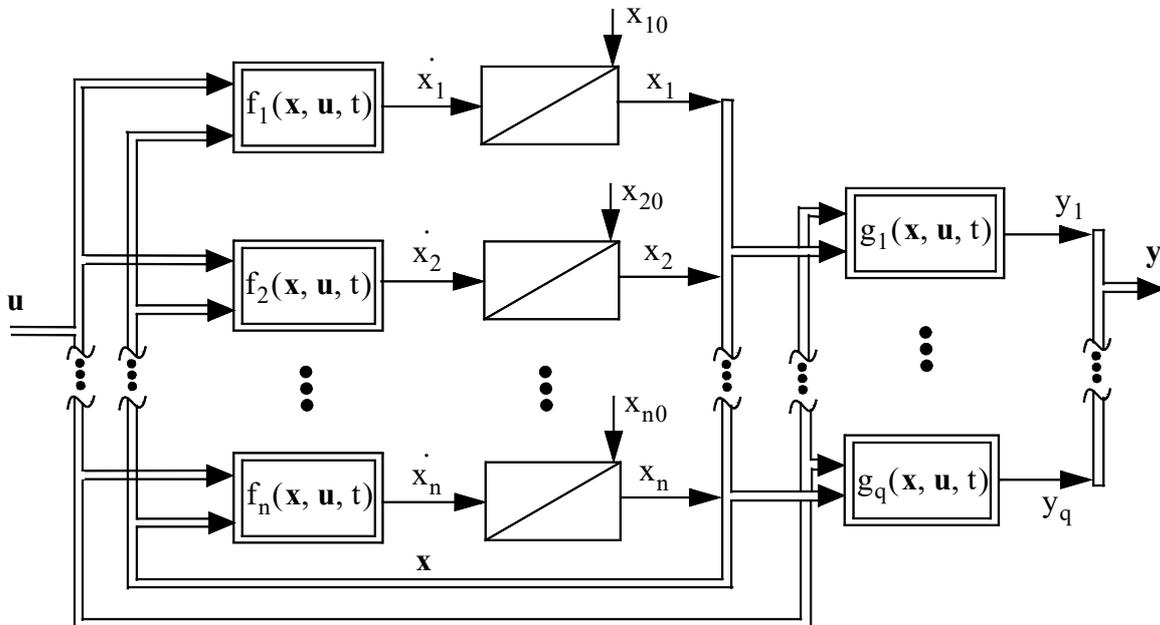
# Regelungsnormalform (RNF)



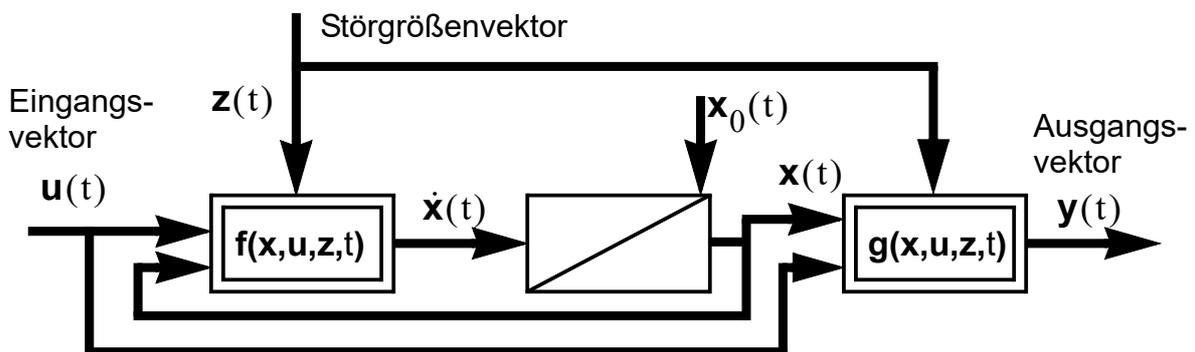
## 2.3.2 Zustandsraum-Modelle

Aus den Zustandsgleichungen kann der Koppelplan des **Strukturbildes** direkt entnommen werden.

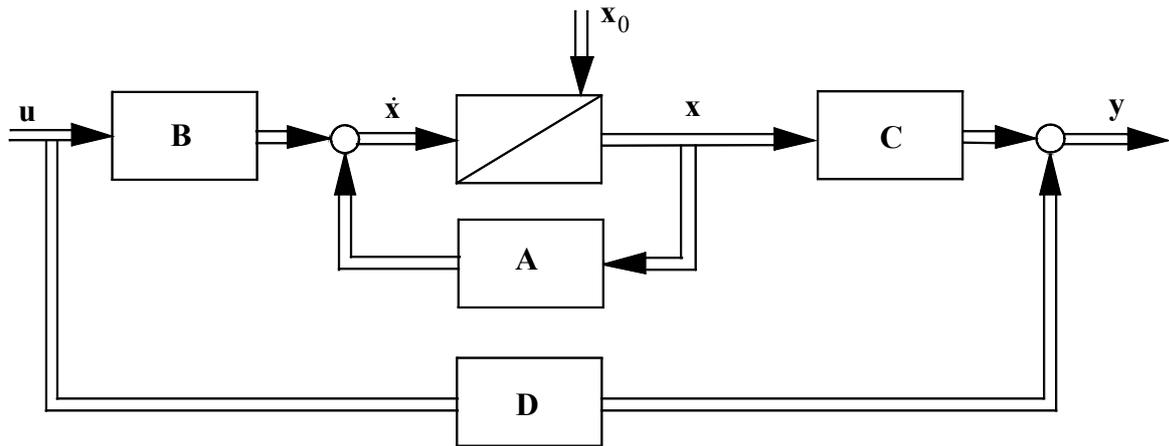
### a.) Nichtlineares Zustandsraum-Modell



Kompaktes Strukturbild (mit Störgrößen)



b.) Lineares Zustandsraum-Modell



## 3 Netzwerkanalyse Technischer Systeme

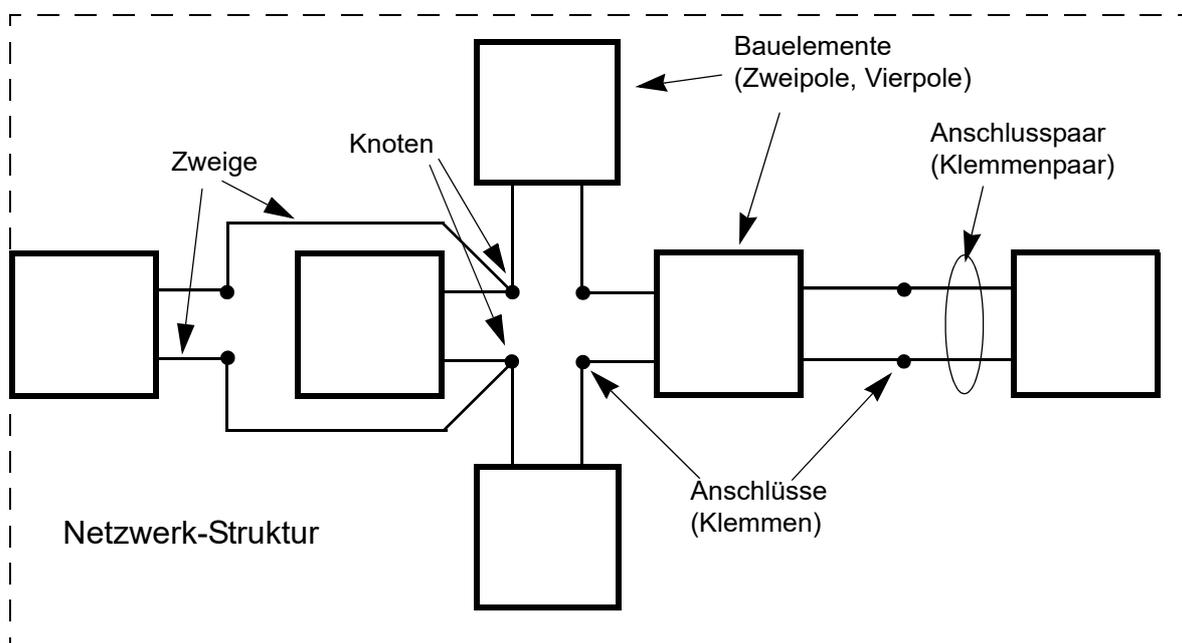
### 3.1 Allgemeine Netzwerk-Ersatzmodelle

Netzwerk-Ersatzmodelle bestehen aus:

- Ersatzbauelementen, die in bestimmten
- Strukturen

so verschaltet werden, dass das Systemverhalten möglichst gut abgebildet wird.

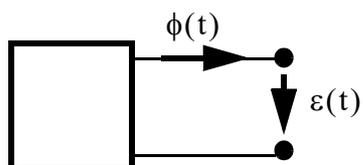
z.B



#### 3.1.1 Bauelemente

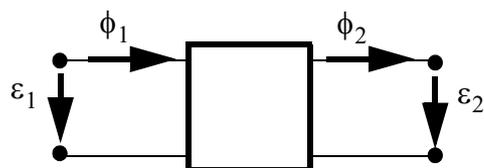
Bauelemente besitzen 1 oder 2 Anschlusspaare

##### Zweipole



z.B.: Quellen, Verbraucher

##### Vierpole

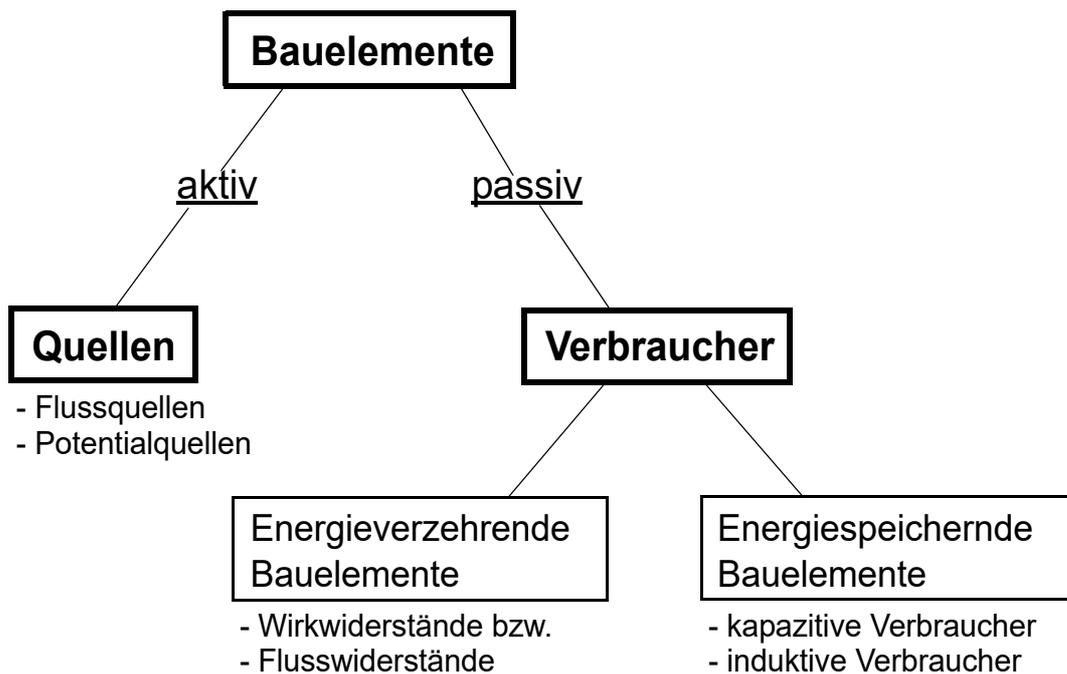


z.B.: Reale Koppler, Übertrager

Der Zustand der einzelnen Bauelemente ist durch die zwei jeweiligen Anschlussgrößen

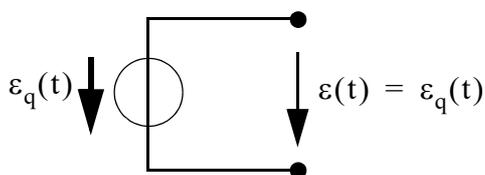
- $\varepsilon(t)$  Potentialgröße (Differenzvariable, Quervariable) und
- $\phi(t)$  Flussgröße (Durchvariable),

die in einem inneren funktionellen Zusammenhang in Abhängigkeit von Bauteilparametern stehen, zu jedem Zeitpunkt eindeutig bestimmt



## 3.1.1.1 Ideale Quellen

### • Potentialquelle

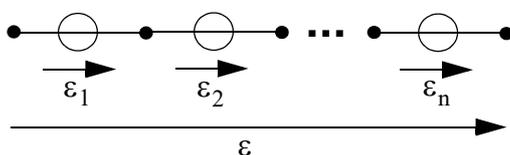


**Potentialgröße** (Quergröße) an Anschlussklemmen **eingepägt** unabhängig von Flussgröße

Bauteilparameter: - Potentialgröße  $\epsilon_q(t)$

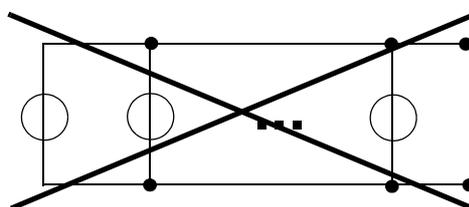
- Innenimpedanz  $Z_i = 0$

#### Reihenschaltung



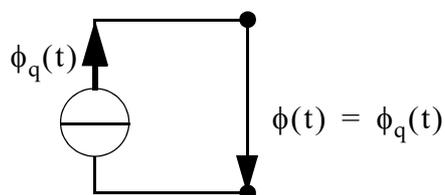
$$\epsilon = \epsilon_{ges} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n = \sum_{i=1}^n \epsilon_i$$

#### Parallelschaltung



**nicht zulässig !**

### • Flussquelle

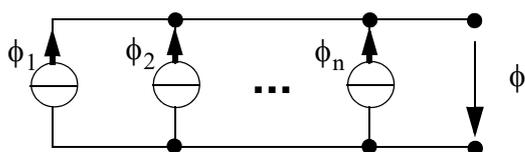


**Flussgröße** (Durchgröße) an Anschlussklemmen **eingepägt** unabhängig von Potentialgröße

Bauteilparameter: - Flussquellgröße  $\phi_q(t)$

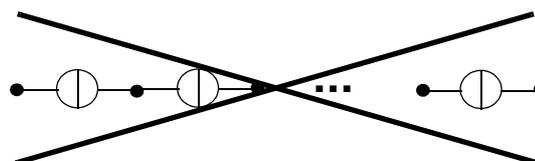
- Innenimpedanz  $Z_i = \infty$

#### Parallelschaltung



$$\phi = \phi_{ges} = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n = \sum_{i=1}^n \phi_i$$

#### Reihenschaltung



**nicht zulässig !**

## Physikalische Analogien für Quellgrößen (Beispiele)

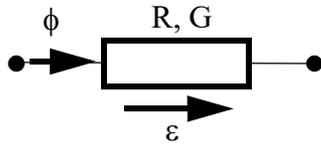
TABELLE 1.

Physikalisches System	Potentialvariable (Quergroße / [Einheit])	Flussvariable (Durchgröße / [Einheit])
<b>Elektrisch</b>	Spannung $u$ / [V]	Strom $i$ / [A]
<b>Mechanisch</b> - Translation - Rotation	- Geschwindigkeit $v$ / [m/s] - Kreisfrequenz $\omega$ / [rad/s]	- Kraft $F$ / [N] - Moment $M$ / [N m]
<b>Thermisch</b>	Temperatur (-differenz) $\vartheta$ / [K]	Wärmestrom $\dot{Q}$ / [W]
<b>Hydrodynamisch</b> (hydraulisch) inkompressibel - Flüssigkeit	Druck $p$ / [Pa] = [N/m <sup>2</sup> ]	Volumenstrom $\dot{V}$ / [m <sup>3</sup> /s]
<b>Gasdynamisch</b> (pneumatisch) kompressibel - Gas	Druck $p$ / [Pa] = [N/m <sup>2</sup> ]	Volumenstrom $\dot{V}$ / [m <sup>3</sup> /s] Massenstrom $\dot{m} = \rho \dot{V}$ / [kg/s]

## 3.1.1.2 Verbraucherbauelemente

### a) Energieverzehrende Bauelemente

- **Widerstand, Leitwert**



$$\varepsilon(t) = R \cdot \phi(t) \quad \circ \bullet \quad \varepsilon(s) = R \cdot \phi(s)$$

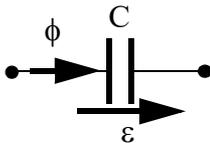
$$\rightarrow \text{Impedanz (Widerstand (reell))} \quad R = \frac{\varepsilon}{\phi}$$

$$\phi(t) = G \cdot \varepsilon(t) \quad \circ \bullet \quad \phi(s) = G \cdot \varepsilon(s)$$

$$\rightarrow \text{Admittanz (Leitwert (reell))} \quad G = \frac{\phi}{\varepsilon}$$

### b) Energiespeichernde Bauelemente

- **Kapazität**



$$\varepsilon(t) = \frac{1}{C} \cdot \int \phi(t) dt \quad \circ \bullet \quad \varepsilon(s) = \frac{1}{C \cdot s} \cdot \phi(s)$$

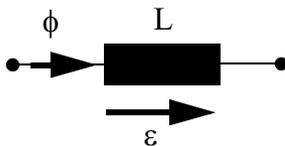
$$\rightarrow \text{Impedanz: } Z_C = \frac{1}{C \cdot s}$$

$$\phi(t) = C \cdot \dot{\varepsilon} \quad \circ \bullet \quad \phi(s) = C \cdot s \cdot \varepsilon(s) - C \cdot \varepsilon(0)$$

$$\rightarrow \text{Admittanz: } Y_C = C \cdot s$$

→ **Kapazität** ist **integraler** Energiespeicher für **Flussgrößen**. **Potentialgröße**  $\varepsilon$  ist **Zustandsgröße**.

- **Induktivität**



$$\varepsilon(t) = L \cdot \dot{\phi} \quad \circ \bullet \quad \varepsilon(s) = L \cdot s \cdot \phi(s) - L \cdot \phi(0)$$

$$\rightarrow \text{Impedanz: } Z_L = L \cdot s$$

$$\phi(t) = \frac{1}{L} \cdot \int \varepsilon(t) dt \quad \circ \bullet \quad \phi(s) = \frac{1}{L \cdot s} \cdot \varepsilon(s)$$

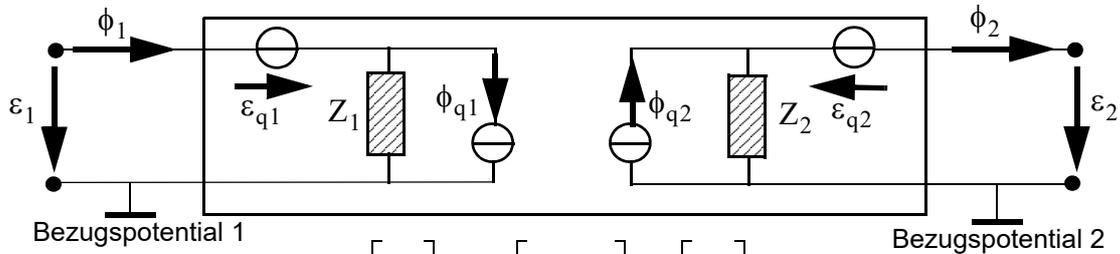
$$\rightarrow \text{Admittanz: } Y_L = \frac{1}{L \cdot s}$$

→ **Induktivität** ist **differentieller** Energiespeicher für **Flussgrößen**. **Flussgröße**  $\phi$  ist **Zustandsgröße**

### 3.1.1.3 Koppler, Übertrager ( Reale gesteuerte Quellen )

Koppler und Übertrager können als beidseitig gesteuerte Quellen betrachtet werden, deren Klemmengrößen an den jeweiligen Anschlusspaaren über eine Koppelmatrix verknüpft sind. ==> Potentialtrennung der Bezugspotentiale

Netzwerk - Quellenersatzschaltbild (real)



**Hybrid-Vierpol:**

Eingangsimpedanz  
 $0 \leq Z_1 \leq \infty$

$$\begin{bmatrix} K_{a2} \\ K_{a1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{u1} \\ K_{u2} \end{bmatrix}$$
 Vektor der abhängigen Klemmengrößen

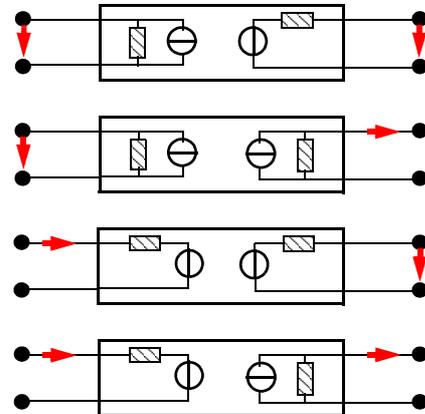
$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}}_{\text{Koppelmatrix } \mathbf{K}}$$

$$\begin{bmatrix} K_{u1} \\ K_{u2} \end{bmatrix}$$
 Vektor der unabhängigen Klemmengrößen

Ausgangsimpedanz  
 $0 \leq Z_2 \leq \infty$

==> Es gibt **4** grundsätzliche Kombinationsmöglichkeiten

1. - Potentialgesteuerte Potentialquelle
2. - Potentialgesteuerte Flussquelle
3. - Flussgesteuerte Potentialquelle
4. - Flussgesteuerte Flussquelle



Zählpfeilkonvention: - Verbraucherpeilsystem ==> Leistung an Verbraucherklemme (+)

#### Eigenschaften

Zu jedem Zeitpunkt lässt sich die momentane Leistung am Anschlussklemmenpaar eines Bauelements durch die Leistungsgleichung

$$p(t) = \varepsilon(t) \cdot \phi(t)$$

Leistung = Potentialgröße · Flussgröße

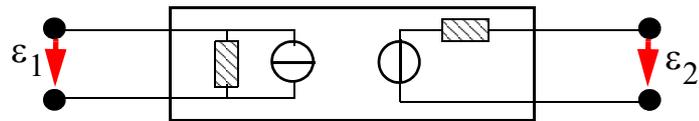
bestimmen. ( Gilt für Zweipole und Vierpole )

## 1.) Potentialgesteuerte Potentialquelle (ideal: $Z_1 \rightarrow \infty$ , $Z_2 \rightarrow 0$ )

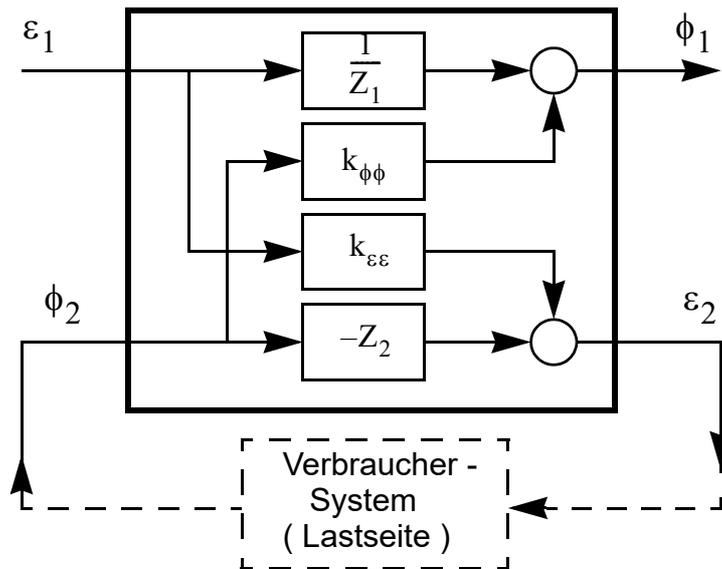
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{2q} - Z_2 \cdot \phi_2 \quad , \quad \varepsilon_{2q} = k_{\varepsilon\varepsilon} \cdot \varepsilon_1 \quad \text{Vorwärtskopplung} \quad , \quad \phi_{2q} = 0$$

$$\phi_1 = \phi_{1q} + \frac{1}{Z_1} \cdot \varepsilon_1 \quad , \quad \phi_{1q} = k_{\phi\phi} \cdot \phi_2 \quad \text{Rückwirkung (Last)} \quad , \quad \varepsilon_{1q} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\varepsilon\varepsilon} & -Z_2 \\ \frac{1}{Z_1} & k_{\phi\phi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$



Strukturbild



### Spezialfälle (Lastseite)

**Leerlauf:**  $Z_L \rightarrow \infty$

$$\phi_2 = 0 \quad , \quad \varepsilon_2 = k_{\varepsilon\varepsilon} \cdot \varepsilon_1$$

$$\phi_1 = \frac{1}{Z_1} \cdot \varepsilon_1$$

**Kurzschluss:**  $Z_L \rightarrow 0$

$$\varepsilon_2 = 0 \quad , \quad \phi_2 = \frac{1}{Z_2} \cdot k_{\varepsilon\varepsilon} \cdot \varepsilon_1$$

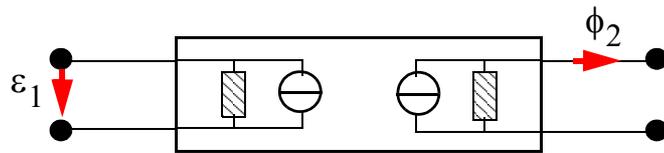
$$\phi_1 = \frac{1}{Z_1} \cdot \varepsilon_1 + k_{\phi\phi} \cdot \frac{1}{Z_2} \cdot k_{\varepsilon\varepsilon} \cdot \varepsilon_1$$

## 2.) Potentialgesteuerte Flussquelle (ideal: $Z_1 \rightarrow \infty$ , $Z_2 \rightarrow \infty$ )

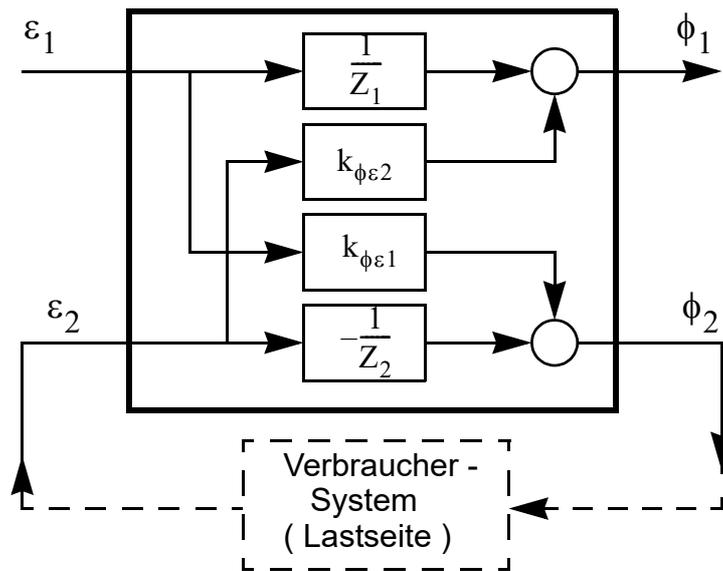
$$\phi_2 = \phi_{2q} - \frac{1}{Z_2} \cdot \varepsilon_2 \quad , \quad \phi_{2q} = k_{\phi\varepsilon 1} \cdot \varepsilon_1 \quad \text{Vorwärtskopplung} \quad \varepsilon_{2q} = 0$$

$$\phi_1 = \phi_{1q} + \frac{1}{Z_1} \cdot \varepsilon_1 \quad , \quad \phi_{1q} = k_{\phi\varepsilon 2} \cdot \varepsilon_2 \quad \text{Rückwirkung (Last)} \quad \varepsilon_{1q} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\phi\varepsilon 1} & -\frac{1}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_1} & k_{\phi\varepsilon 2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$



Strukturbild



### Spezialfälle (Lastseite)

**Leerlauf:**  $Z_L \rightarrow \infty$

**Kurzschluss:**  $Z_L \rightarrow 0$

$$\phi_2 = 0 \quad , \quad \varepsilon_2 = Z_2 \cdot k_{\phi\varepsilon 1} \cdot \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2 = 0 \quad , \quad \phi_2 = k_{\phi\varepsilon 1} \cdot \varepsilon_1$$

$$\phi_1 = \frac{\varepsilon_1}{Z_1} + k_{\phi\varepsilon 2} \cdot Z_2 \cdot k_{\phi\varepsilon 1} \cdot \varepsilon_1$$

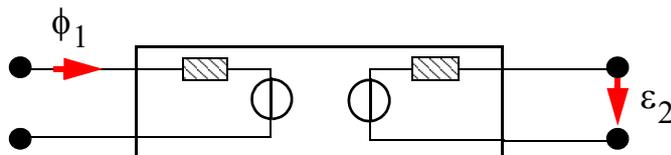
$$\phi_1 = \frac{1}{Z_1} \cdot \varepsilon_1$$

### 3.) Flussgesteuerte Potentialquelle (ideal: $Z_1 \rightarrow 0$ , $Z_2 \rightarrow 0$ )

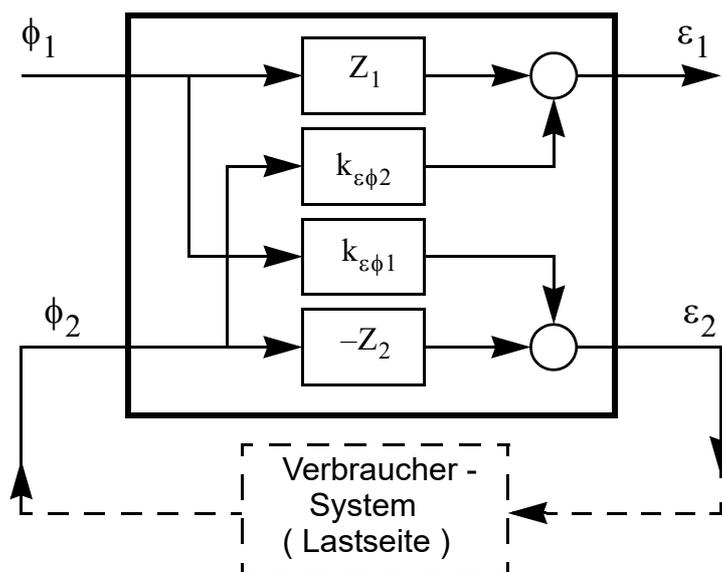
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{2q} - Z_2 \cdot \phi_2 \quad , \quad \varepsilon_{2q} = k_{\varepsilon\phi 1} \cdot \phi_1 \quad \text{Vorwärtskopplung} \quad \phi_{2q} = 0$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1q} + Z_1 \cdot \phi_1 \quad , \quad \varepsilon_{1q} = k_{\varepsilon\phi 2} \cdot \phi_2 \quad \text{Rückwirkung (Last)} \quad \phi_{1q} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\varepsilon\phi 1} & -Z_2 \\ Z_1 & k_{\varepsilon\phi 2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$



Strukturbild



#### Spezialfälle (Lastseite)

**Leerlauf:**  $Z_L \rightarrow \infty$

$$\phi_2 = 0 \quad , \quad \varepsilon_2 = k_{\varepsilon\phi 1} \cdot \phi_1$$

$$\varepsilon_1 = Z_1 \cdot \phi_1$$

**Kurzschluss:**  $Z_L \rightarrow 0$

$$\varepsilon_2 = 0 \quad , \quad \phi_2 = \frac{1}{Z_2} \cdot k_{\varepsilon\phi 1} \cdot \phi_1$$

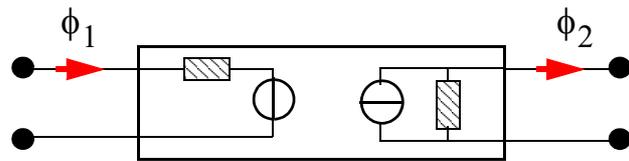
$$\varepsilon_1 = Z_1 \cdot \phi_1 + k_{\varepsilon\phi 2} \cdot \frac{1}{Z_2} \cdot k_{\varepsilon\phi 1} \cdot \phi_1$$

## 4.) Flussgesteuerte Flussquelle (ideal: $Z_1 \rightarrow 0$ , $Z_2 \rightarrow \infty$ )

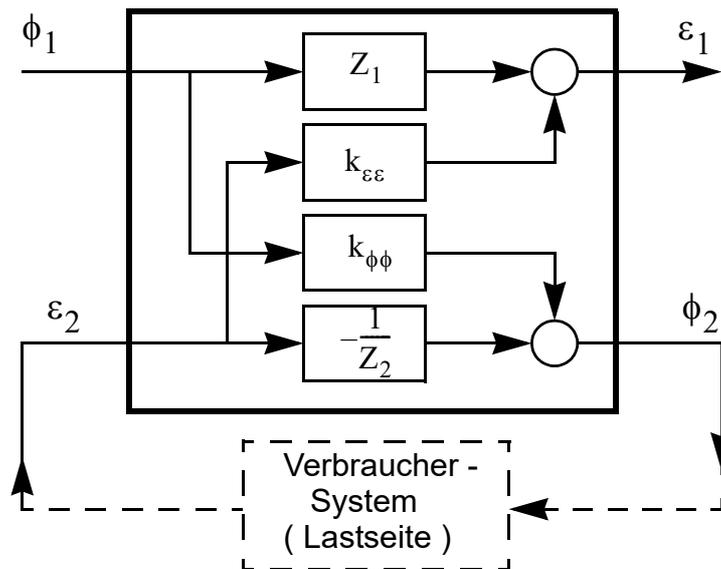
$$\phi_2 = \phi_{2q} - \frac{1}{Z_2} \cdot \varepsilon_2 \quad , \quad \phi_{2q} = k_{\phi\phi} \cdot \phi_1 \quad \text{Vorwärtskopplung} \quad \varepsilon_{2q} = 0$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1q} + Z_1 \cdot \phi_1 \quad , \quad \varepsilon_{1q} = k_{\varepsilon\varepsilon} \cdot \varepsilon_2 \quad \text{Rückwirkung (Last)} \quad \phi_{1q} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \phi_2 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\phi\phi} & -\frac{1}{Z_2} \\ Z_1 & k_{\varepsilon\varepsilon} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$



Strukturbild



### Spezialfälle (Lastseite)

**Leerlauf:**  $Z_L \rightarrow \infty$

$$\phi_2 = 0 \quad , \quad \varepsilon_2 = Z_2 \cdot k_{\phi\phi} \cdot \phi_1$$

$$\varepsilon_1 = Z_1 \cdot \phi_1 + k_{\varepsilon\varepsilon} \cdot Z_2 \cdot k_{\phi\phi} \cdot \phi_1$$

**Kurzschluss:**  $Z_L \rightarrow 0$

$$\varepsilon_2 = 0 \quad , \quad \phi_2 = k_{\phi\phi} \cdot \phi_1$$

$$\varepsilon_1 = Z_1 \cdot \phi_1$$

## 3.2 Allgemeine Netzwerk-Analyseverfahren

Ausgangspunkt ist das Netzwerk-Ersatzmodells mit den elementaren Bestandteilen:

- **Knoten**
- **Zweige**

### Knoten:

Mehr als 2 Bauelementanschlüsse sind verknüpft. Es ergeben sich

Verbindungspunkte:  $\rightarrow k$  Knoten (  $k$  Anzahl der Knoten)

### Zweig:

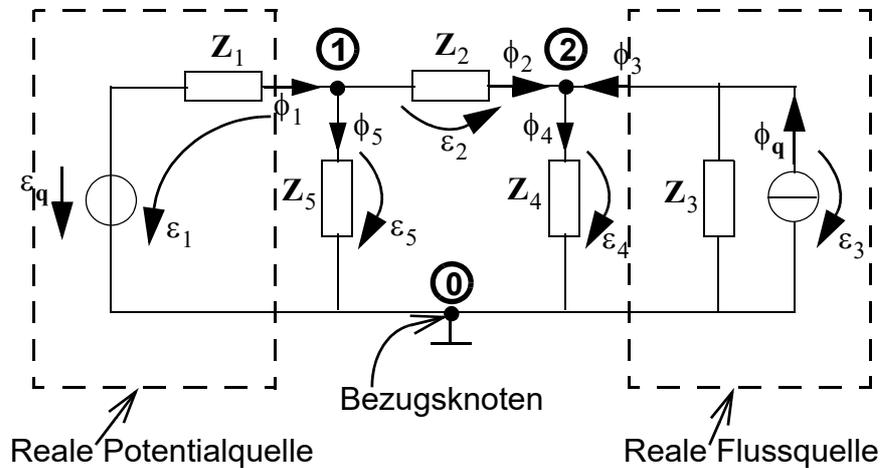
Verbindungsline zwischen 2 Knoten mit einem oder mehreren in Reihe liegenden

Bauteilen ergeben:  $\rightarrow z$  Zweige (  $z$  Anzahl der Zweige)

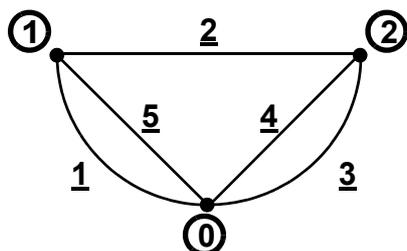
$\rightarrow$  Ein geschlossener Linienzug über die Zweige eines Netzwerks ergibt eine:

### Masche bzw. (Schleife)

Beispiel eines Netzwerks:



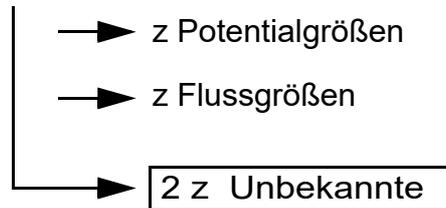
**Skelett:** Abstrahierte Netzwerkstruktur (nur Knoten und Zweige)



$k = 3$  (Anzahl der Knoten)

$z = 5$  (Anzahl der Zweige)

## Problemstellung: Bestimmung der Zweiggrößen?



Aufstellung der 2 z unabhängigen Gleichungen

### 3.2.1 Vollständiges Gleichungssystem

#### 1. Schritt:

z Gleichungen für Potentialgrößen der Zweige aus  $\varepsilon, \phi$  - Funktionen der Bauelemente

(Bsp. : z = 5 Gleichungen)

**1:**  $\varepsilon_1 = \varepsilon_q - Z_1 \cdot \phi_1$

**2:**  $\varepsilon_2 = Z_2 \cdot \phi_2$

**3:**  $\varepsilon_3 = Z_3 \cdot \phi_q - Z_3 \cdot \phi_3$

**4:**  $\varepsilon_4 = Z_4 \cdot \phi_4$

**5:**  $\varepsilon_5 = Z_5 \cdot \phi_5$

#### 2. Schritt:

k - 1 Gleichungen für Flussgrößen aus Knotenbilanzen

(Bsp.: k - 1 = 2 Gleichungen)

**①:**  $\phi_1 - \phi_2 - \phi_5 = 0$

**②:**  $\phi_2 + \phi_3 - \phi_4 = 0$

### 3. Schritt:

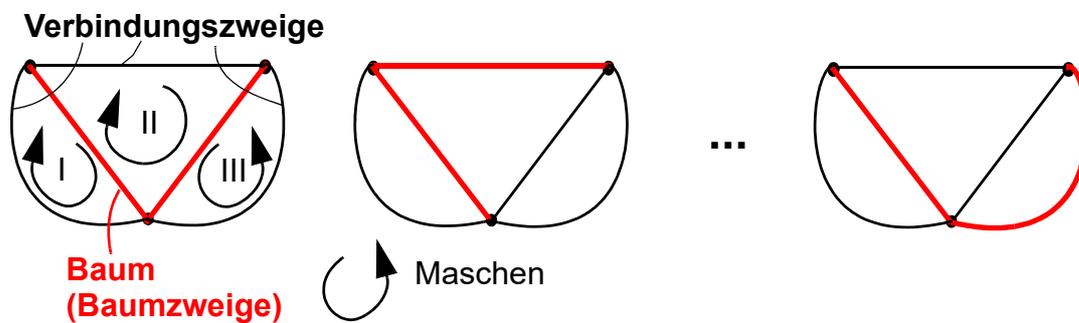
Bestimmung von  $m = z - (k - 1)$  unabhängige Maschengleichungen

Problem: Wie sind die Maschen festzulegen ?

Aus Skelett: Definition eines **Baumes**

- **Baumzweige**
- **Verbindungszweige** (Anzahl  $m$ )

Beispiel:



### Regel:

In jeder **Masche** darf nur 1 Verbindungsweig liegen:  $\rightarrow$   $m$  unabhängige Maschengleichungen

I:  $\varepsilon_5 - \varepsilon_1 = 0$

II:  $\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5 = 0$

III:  $\varepsilon_4 - \varepsilon_3 = 0$

Mit Schritt 1 - Schritt 3 ist Problem gelöst.

Bei linearen Systemen existiert eindeutige Lösung für die unbekanntenen Potential- und Flussgrößen der Zweige (Hilfsmittel, z.B. Maple).

$\rightarrow$  Beliebige Übertragungsmodelle möglich, je nach Definition der Ausgangsgrößen bei den gegebenen Eingangsgrößen (Quellen)

## 3.2.2 Knotenpotentialverfahren

Ziel: Problemlösung über  $k - 1$  Knotenpotentiale  $\varepsilon_{i0}$  bzgl. eines Bezugsknotens.

Bsp.: Zu bestimmen sind  $\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}$

### 1. Schritt:

Zweigpotentialgrößen als Knotenpotentialgrößen bilden:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{10}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{10} - \varepsilon_{20}$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{20}$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_{20}$$

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_{10}$$

### 2. Schritt:

$k - 1$  Knotengleichungen (ohne Bezugsknoten) durch Knotenpotentiale und Zweig-Admittanzen ausdrücken.

$$\mathbf{1:} \quad \phi_1 - \phi_2 - \phi_5 = 0 \rightarrow \frac{\varepsilon_q - \varepsilon_{10}}{Z_1} - \frac{\varepsilon_{10} - \varepsilon_{20}}{Z_2} - \frac{\varepsilon_{10}}{Z_5} = 0$$

$$\mathbf{2:} \quad \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 = 0 \rightarrow \frac{\varepsilon_{10} - \varepsilon_{20}}{Z_2} + \frac{Z_3 \cdot \phi_q - \varepsilon_{20}}{Z_3} - \frac{\varepsilon_{20}}{Z_4} = 0$$

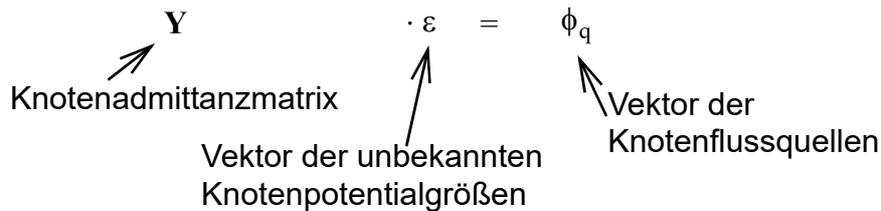
### **Ordnen:**

$$\left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_5} \right) \cdot \varepsilon_{10} - \frac{1}{Z_2} \cdot \varepsilon_{20} = \frac{\varepsilon_q}{Z_1}$$

$$-\frac{1}{Z_2} \cdot \varepsilon_{10} + \left( \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right) \cdot \varepsilon_{20} = \phi_q$$

## Matrizenschreibweise

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_5} & -\frac{1}{Z_2} \\ -\frac{1}{Z_2} & \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} \cdot \varepsilon_q \\ \phi_q \end{bmatrix}$$



### Eigenschaften:

#### Knotenleitwert-Matrix:

- Hauptdiagonalelemente  $Y_{ii}$  enthalten die  $\sum$  der Leitwerte der Zweige zum i-ten Knoten.
- Admittanzmatrix  $\mathbf{Y}$  ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen.
- Nebenelemente  $Y_{ij}$  werden mit den negativen Leitwerten des Zweiges zwischen dem i-ten und dem j-ten Knoten gebildet.

#### Flussquellen-Vektor:

- i-tes Element enthält die  $\sum$  der Flussquellen des i-ten Knotens (reale Potentialquellen sind in reale Flussquellen umzuwandeln)

#### Spezialfall:

Bei auftretenden idealen Potentialquellen ist das entsprechende Knotenpotential am Anschlussknoten der Potentialquelle bereits bekannt.

Folge: Anzahl der Unbekannten reduziert sich um die Anzahl der idealen Potentialquellen.

### 3.2.3 Maschenflussverfahren

Ziel: Problemlösung über  $m = z - (k - 1)$  Maschenflüsse der Verbindungszweige

Beispiel: Zu bestimmen sind:  $\phi_I, \phi_{II}, \phi_{III}$

1. Schritt: Maschenflussgrößen aus Zweigflussgrößen bestimmen

I:  $\phi_I = \phi_1$

II:  $\phi_{II} = \phi_2$

III:  $\phi_{III} = \phi_3$

2. Schritt: m Maschengleichungen durch Maschenflussgrößen und Zweigimpedanzen ausdrücken.

I:  $\varepsilon_5 - \varepsilon_1 = 0 \qquad Z_5 \cdot (\phi_I - \phi_{II}) - \varepsilon_q + Z_1 \cdot \phi_I = 0$

II:  $\varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5 = 0 \qquad Z_2 \cdot \phi_{II} + Z_4 \cdot (\phi_{II} + \phi_{III}) - Z_5 \cdot (\phi_I - \phi_{II}) = 0$

III:  $\varepsilon_4 - \varepsilon_3 = 0 \qquad Z_4 \cdot (\phi_{II} + \phi_{III}) - Z_3 \cdot \phi_q + Z_3 \cdot \phi_{III} = 0$

Ordnen:

$$(Z_5 + Z_1) \cdot \phi_I - Z_5 \cdot \phi_{II} = \varepsilon_q$$

$$-Z_5 \cdot \phi_I + (Z_2 + Z_4 + Z_5) \cdot \phi_{II} + Z_4 \cdot \phi_{III} = 0$$

$$Z_4 \cdot \phi_{II} + (Z_3 + Z_4) \cdot \phi_{III} = Z_3 \cdot \phi_q$$

Matrizenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_5 & -Z_5 & 0 \\ -Z_5 & Z_2 + Z_4 + Z_5 & Z_4 \\ 0 & Z_4 & Z_3 + Z_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_{II} \\ \phi_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_q \\ 0 \\ Z_3 \cdot \phi_q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\varepsilon}_q$$

Maschenimpedanz-Matrix

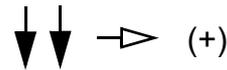
Maschenfluss-Vektor

Maschen-Potentialquellen-Vektor

## Eigenschaften

### Maschenimpedanz-Matrix:

- Hauptdiagonalelemente  $Z_{ii}$  enthalten die  $\sum$  der Impedanzen der i-ten Masche.
- Impedanzmatrix  $\mathbf{Z}$  ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen.
- Nebenelemente  $Z_{ij}$  sind mit der Impedanz des gemeinsamen Zweiges der i, j-ten Masche besetzt. Vorzeichen orientiert sich am Richtungssinn der Maschenströme



### Maschen-Potentialquellen-Vektor:

- i-tes Element enthält  $\sum$  der Potentialquellen der i-ten Masche (reale Flussquellen sind in reale Potentialquellen umzuwandeln).

### Spezialfall:

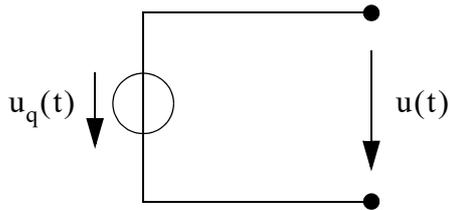
Bei auftretenden idealen Flussquellen sind die Flussquellen auf Verbindungszweige zu legen. Damit sind die entsprechenden Maschenflussgrößen bereits bekannt.  
 Folge: Anzahl der Unbekannten reduziert sich um die Anzahl der idealen Flussquellen.

## 4 Technische Modelle

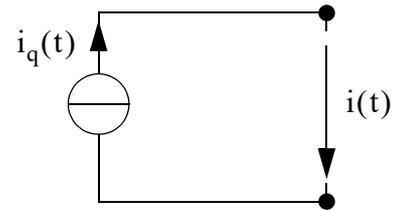
### 4.1 Elektrotechnische Modelle

#### 4.1.1 Quellenbauelemente

Ideale Spannungsquelle

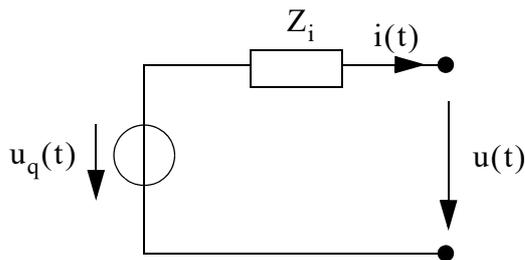


Ideale Stromquelle

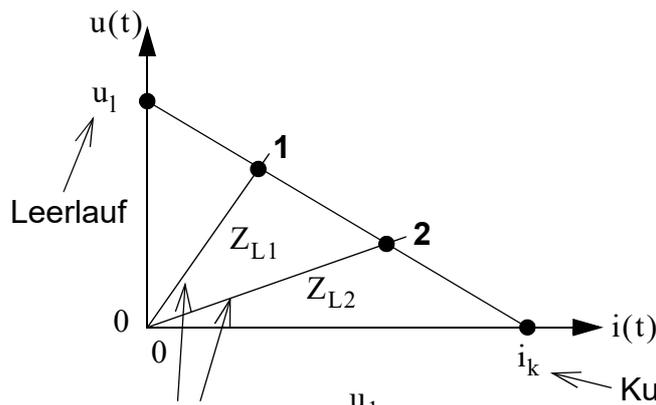
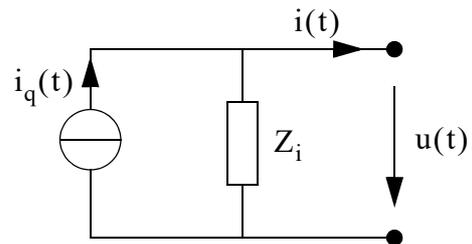


#### Reale Quellen

Reale Spannungsquelle



Reale Stromquelle



$$u_q = Z_i \cdot i_q \quad \text{Quellengrößen}$$

$$u = u_q - Z_i \cdot i$$

$$i = i_q - \frac{1}{Z_i} \cdot u \quad \text{Klemmengrößen}$$

2 Lastfälle:

$$Z_{L1} = \frac{u_1}{i_1}$$

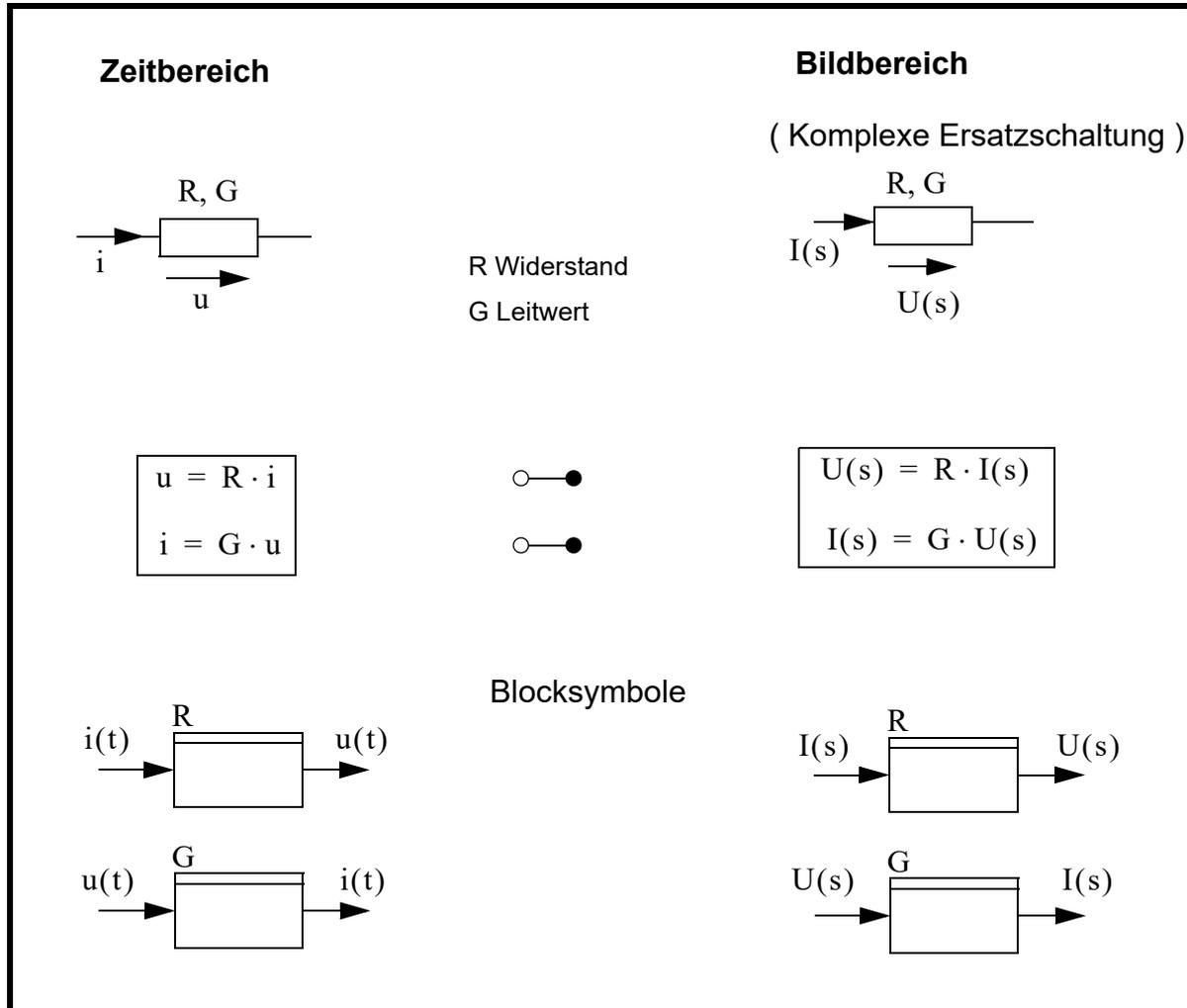
$$Z_{L2} = \frac{u_2}{i_2}$$

$$u = \frac{Z_L}{Z_i + Z_L} \cdot u_q \quad i = \frac{Z_i}{Z_i + Z_L} \cdot i_q$$

**Satz:** Reale Quellen lassen sich immer in ihre äquivalenten Quellen umwandeln !

## 4.1.2 Verbraucherbauelemente

### 1. Widerstand, Leitwert



## 2. Kondensator (Elektrische Kapazität)

Zeitbereich	Bildbereich ( Komplexe Ersatzschaltung )
$u = \frac{1}{C} \cdot \int idt$ $i = C \cdot \dot{u}$	<p style="text-align: right;"><u>Impedanz</u></p> $U(s) = \left( \frac{1}{C \cdot s} \right) \cdot I(s)$ <p style="text-align: right;"><u>Admittanz</u></p> $I(s) = (C \cdot s) \cdot U(s) - C \cdot u(0)$
	$U(s) = \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s) + \frac{1}{s} \cdot u(0)$
<b>Blocksymbole</b>	
	<u>I-Glied</u>
	<u>D-Glied</u>

Kondensator ist Energiespeicher: → Anfangsbedingungen → Quellen

### 3. Spule (Elektrische Induktivität)

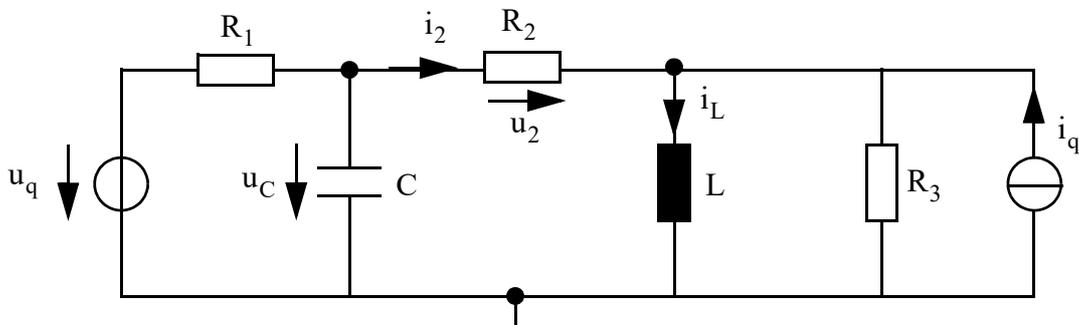
Zeitbereich		Bildbereich
		(Komplexe Ersatzschaltung) 
$u = L \cdot \dot{i}$ $i = \frac{1}{L} \cdot \int u dt$		<p style="text-align: right;"><u>Impedanz</u></p> $U(s) = L \cdot s \cdot I(s) - L \cdot i(0)$ <p style="text-align: right;"><u>Admittanz</u></p> $I(s) = \frac{1}{L \cdot s} \cdot U(s)$
		$I(s) = \frac{1}{L \cdot s} \cdot U(s) + \frac{1}{s} \cdot i(0)$
<b>Blocksymbole</b>		
	<u>D-Glied</u>	
	<u>I-Glied</u>	

Spule ist Energiespeicher: → Anfangsbedingungen → Quellen

## 4.1.3 Elektrische Systeme

Modellbildung aus dem elektrischen Ersatzschaltbild

Beispiel :



### 1. Schritt: Modellvoraussetzungen

#### Eingangsgrößen

sind alle unabhängig eingepprägten Quellgrößen (ideale Strom- und Spannungsquellen)

Beispiel:

$$u_q, i_q \rightarrow \underline{\text{Eingangsvektor}} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_q \\ i_q \end{bmatrix}$$

#### Ausgangsgrößen

können sein, alle abhängigen Systemgrößen und beliebige Funktionen davon.

Beispiel:

$$u_2, i_2 \rightarrow \underline{\text{Ausgangsvektor}} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Zustandsgrößen sind:

- Spannungen an Kondensatoren
- Ströme in Spulen

Beispiel:

$$u_C, i_L \rightarrow \underline{\text{Zustandsvektor}} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

## 2. Schritt: Aufstellung der Modellgleichungen

Es können alle 3 aufgezeigten Vorgehensweisen grundsätzlich angewandt werden:

- Vollständiges Gleichungssystem
- Knotenpotentialverfahren
- Maschenstromverfahren

==> Es stehen jeweils algebraische Lösungen für die jeweiligen Unbekannten im Bildbereich zur Verfügung

Beispiel: Anwendung des Knotenpotentialverfahrens

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C \cdot s & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{L \cdot s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \cdot u_q \\ i_q \end{bmatrix}$$

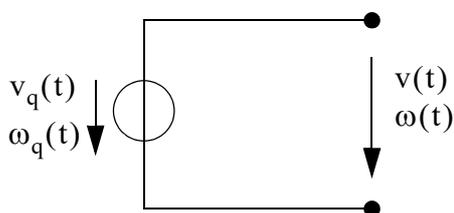
## 4.2 Mechanische Modelle

### Schaltungstreue Netzwerkmodelle:

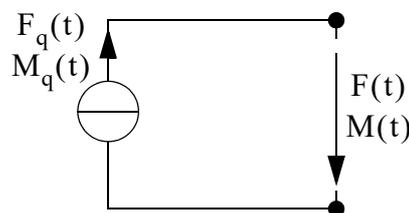
- Potentialgröße:
  - **Geschwindigkeit  $v$**  (Translation)
  - **Winkelgeschwindigkeit  $\omega$**  (Rotation)
- Flussgröße:
  - **Kraft  $F$**  (Translation)
  - **Moment  $M$**  (Rotation)

### 4.2.1 Quellenbauelemente

Ideale Bewegungsquelle



Ideale Kraft-/Momentenquelle



### 4.2.2 Verbraucherbauelemente

1. Reibungswiderstand  $R = 1/d$  (Dämpfung  $d$ ), Reibungsleitwert  $G = 1/R = d$

Zeitbereich	Bildbereich (Komplexe Ersatzschaltung)
<p><math>R</math> Reibungswiderstand <math>G</math> Reibungsleitwert</p>	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math display="block">\begin{aligned} v(t) &amp;= R \cdot F(t) &amp; \omega(t) &amp;= R \cdot M(t) \\ F(t) &amp;= G \cdot v(t) &amp; M(t) &amp;= G \cdot \omega(t) \end{aligned}</math> </div>	$\begin{aligned} v(s) &= R \cdot F(s) & \Omega(s) &= R \cdot M(s) \\ F(s) &= G \cdot v(s) & M(s) &= G \cdot \Omega(s) \end{aligned}$
Blocksymbole	

## 2. Masse m, Trägheitsmoment J (Mechanische Kapazitäten)

**Zeitbereich**

$C = m, J$

**Bildbereich**  
(Komplexe Ersatzschaltung)

$C = m, J$

$v = \frac{1}{m} \cdot \int F dt \quad \omega = \frac{1}{J} \cdot \int M dt$

$F = m \cdot \dot{v} \quad M = J \cdot \dot{\omega}$

**Impedanz**

$v(s) = \frac{1}{m \cdot s} \cdot F(s) \quad \Omega(s) = \frac{1}{J \cdot s} \cdot M(s)$

**Admittanz**

$F(s) = m \cdot s \cdot v(s) - m \cdot v(0)$   
 $M(s) = J \cdot s \cdot \Omega(s) - J \cdot \omega(0)$

$v(s) = \frac{1}{m \cdot s} \cdot F(s) + \frac{1}{s} \cdot v(0)$   
 $\Omega(s) = \frac{1}{J \cdot s} \cdot M(s) + \frac{1}{s} \cdot \omega(0)$

**Blocksymbole**

**I-Glied**

$F(t) \rightarrow \left[ \frac{1}{m} \cdot \int F dt \right] \rightarrow v(t)$

$M(t) \rightarrow \left[ \frac{1}{J} \cdot \int M dt \right] \rightarrow \omega(t)$

**D-Glied**

$v(t) \rightarrow [m \cdot \dot{v}] \rightarrow F(t)$

$\omega(t) \rightarrow [J \cdot \dot{\omega}] \rightarrow M(t)$

**Blocksymbole**

$F(s) \rightarrow \left[ \frac{1}{m \cdot s} \right] \rightarrow v(s)$

$M(s) \rightarrow \left[ \frac{1}{J \cdot s} \right] \rightarrow \Omega(s)$

$v(s) \rightarrow [m \cdot s] \rightarrow F(s)$

$\Omega(s) \rightarrow [J \cdot s] \rightarrow M(s)$

Mechanische Kapazitäten sind Energiespeicher: → Anfangsbedingungen → Quellen

Technische Modelle

→ 4 - 8 →

### 3. Feder $c$ , Drehfeder $c_d$ (Mechanische Induktivitäten)

**Zeitbereich**

$L = \frac{1}{c}, \frac{1}{c_d}$

$F(t), M(t)$  → [Block] →  $v(t), \omega(t)$

$F = c \cdot x$   
 $x = \int v dt$

$M = c_d \cdot \phi$   
 $\phi = \int \omega dt$

**Bildbereich**  
(Komplexe Ersatzschaltung)

$F(s), M(s)$  → [Block] →  $v(s), \Omega(s)$

$L = \frac{1}{c}, \frac{1}{c_d}$

**Admittanz**

$F(s) = \frac{1}{n \cdot s} \cdot v(s) \quad M(s) = \frac{1}{n_d \cdot s} \cdot \Omega(s)$

**Impedanz**

$v(s) = n \cdot s \cdot F(s) - n \cdot F(0)$   
 $\Omega(s) = n_d \cdot s \cdot M(s) - n_d \cdot M(0)$

↳  $F(s) = \frac{1}{n \cdot s} \cdot v(s) + \frac{1}{s} \cdot F(0)$   
 $M(s) = \frac{1}{n_d \cdot s} \cdot \Omega(s) + \frac{1}{s} \cdot M(0)$

**Nachgiebigkeiten:**

$n = \frac{1}{c} \quad n_d = \frac{1}{c_d}$

**Blocksymbole**

D-Glied

$n$

D-Glied

$n_d$

I-Glied

$c$

I-Glied

$c_d$

Two circuit diagrams showing the equivalent circuit models for the spring and torsion spring, including initial conditions.

Federn sind Energiespeicher: → Anfangsbedingungen → Quellen

## 4.3 Dynamische Modelle für Zustände in Bilanzräumen

Zustände in Bilanzräumen sind abhängig von:

- Energie- und Stoffströme über die Systemgrenzen des Bilanzraumes
- Energie- und Stoffumwandlungs- und Transportvorgänge im Bilanzraum (z.B. chemische und biologische Reaktionen im Bilanzraum)

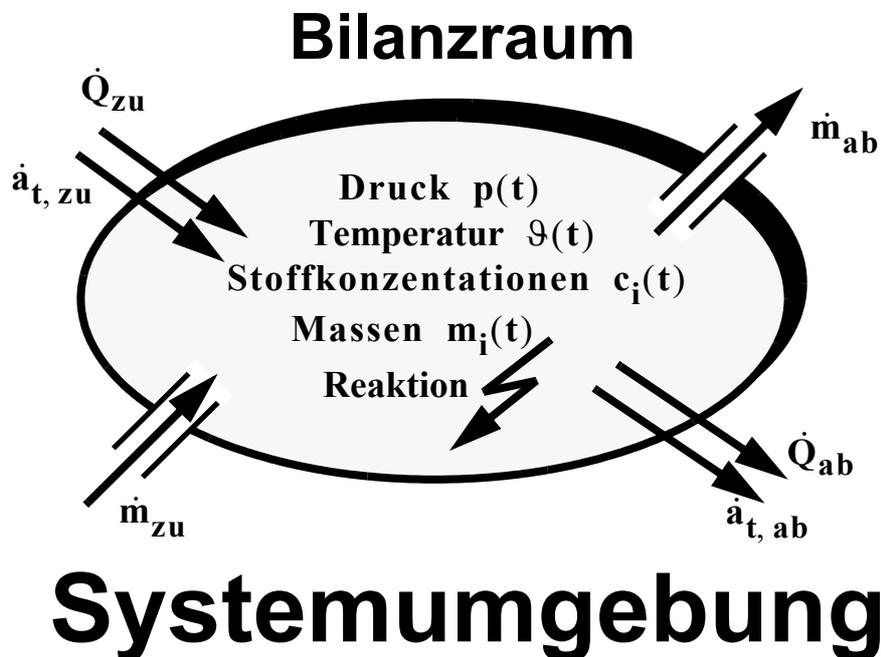
Der Zustand zu einem beliebigen Zeitpunkt im Bilanzraum wird durch innere Zustandsgrößen beschrieben:

- |                        |                |                       |              |
|------------------------|----------------|-----------------------|--------------|
| • Temperatur           | $\vartheta(t)$ | Volumen-/Massenströme | $\dot{V}(t)$ |
| • Systemdruck          | $p(t)$         | Wärme-/Entropieströme | $\dot{Q}(t)$ |
| • Stoffkonzentrationen | $c(t)$         | Reaktionsraten        | $\dot{C}(t)$ |

Die Stoffe im Bilanzraum können in verschiedenen Aggregatzuständen vorliegen:

- fest
- flüssig
- gasförmig

Die Stoffeigenschaften können sich mit den Zuständen ändern. (z.B.: Kompressibilität, Viskosität, Festigkeit, usw. ...)



$\dot{Q}$  Thermische Leistung

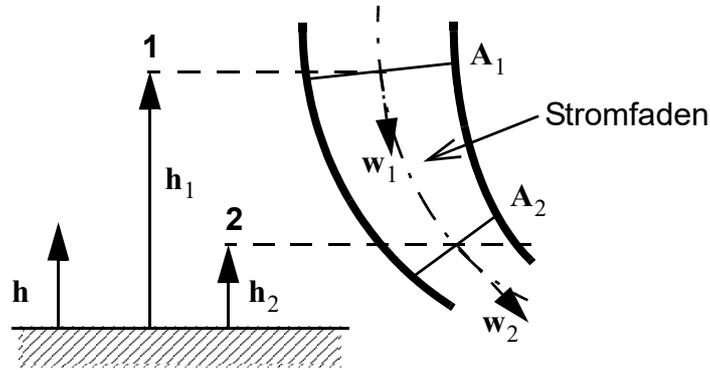
$\dot{a}_t$  Technische Leistung

$\dot{m}$  Massenstrom

## 4.4 Hydrodynamische Modelle

Beschreibung von Speicher- und Transportvorgängen von Fluiden in geschlossenen Systemen (Zunächst ideale Bedingungen: **Stationäre** und **verlustfrei** Strömung)

Grundlagen:



Fluide:

- inkompressible Medien: Dichte  $\rho = \text{konstant} \neq f(\text{Druck } p)$ , z.B.: => Flüssigkeiten
- kompressible Medien: Dichte  $\rho = f(\text{Druck } p)$ , z.B.: => Gase

Voraussetzung: Strömung ist **reibungsfrei** (keine Verluste)

### 1. Energiebilanz

Energieerhaltung entlang des Stromfadens:  $\sum E = \text{konstant}$

$$m \cdot g \cdot h + m \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot w^2 + m \cdot u = \text{konstant}$$

potentielle Energie
Druckenergie
kinetische Energie
innere Energie f(T)

**Bernoulli-Gleichung**

$$g \cdot h_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} w_1^2 + u_1 = g \cdot h_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} \cdot w_2^2 + u_2$$

## 2. Kontinuitätssatz (Massenbilanz)

(Materie kann weder entstehen noch verschwinden)

Massenstrom:

$$\boxed{\dot{m} = \text{konstant}} \quad \rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dots$$

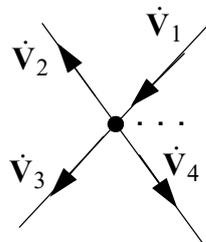
$$\left. \begin{array}{l} \text{L} \\ \text{R} \end{array} \right\} \rightarrow \dot{m} = \dot{V} \cdot \rho = A \cdot w \cdot \rho \quad (\dot{V} = \text{Volumenstrom})$$

Gilt zusätzlich:  $\rho = \text{konstant}$  (inkompressibel, z.B. Flüssigkeit)

$$\left. \begin{array}{l} \text{L} \\ \text{R} \end{array} \right\} \rightarrow \dot{V} = \text{konstant} \rightarrow \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dots$$

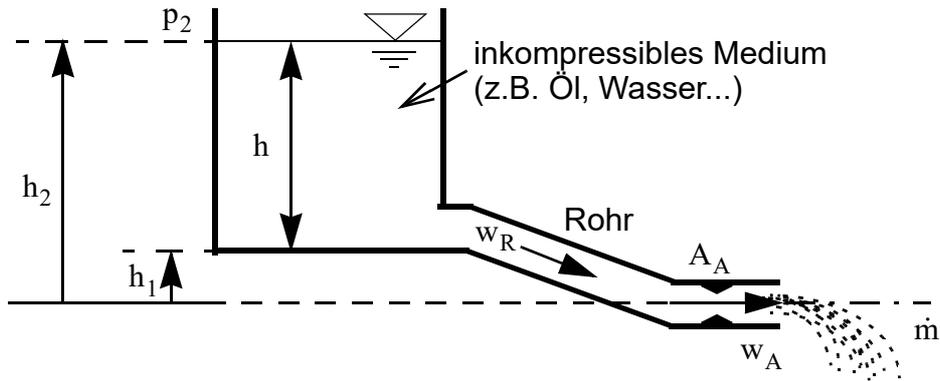
### Beispiele:

Leitungsverteiler



$$\dot{V}_1 - \dot{V}_2 - \dot{V}_3 \pm \dots = 0$$

## Behälter



Frage:  $p_1, w_R, w_A, \dot{m}, \dot{V} =$

## Lösung:

### Behälterboden (Bernoulli)

$$\frac{p_1}{\rho} + g \cdot h_1 = \frac{p_2}{\rho} + g \cdot h_2 \quad \longrightarrow \quad (p_1 - p_2) = \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h$$

$$\hookrightarrow \boxed{p_1 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h}$$

### Auslauf

Bernoulli:

$$\frac{p_2}{\rho} + g \cdot h_2 = \frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot w_A^2 \quad \longrightarrow \quad w_A = \sqrt{2 \cdot \left( \frac{p_2 - p_A}{\rho} + g \cdot h_2 \right)}$$

mit  $p_2 = p_A$ :  $\boxed{w_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2}}$  **Torricelli**

→ Volumenstrom:  $\boxed{\dot{V} = A_A \cdot w_A = A_A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2}}$

→ Massenstrom:  $\boxed{\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot A_A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2}}$

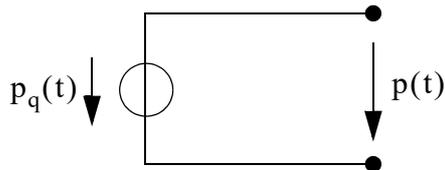
Konti-Gleichung:  $\dot{m}_R = \dot{m}$  bzw.  $\dot{V}_R = \dot{V}$

$$\hookrightarrow \boxed{A_R \cdot w_R = A_A \cdot w_A \quad \longrightarrow \quad w_R = \frac{A_A}{A_R} \cdot w_A = \frac{A_A}{A_R} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2}}$$

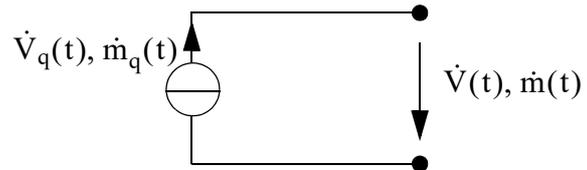
## 4.4.1 Hydrodynamische Quellen

### Ideale Strömungsquellen

Druckquelle  
(Potentialquelle)



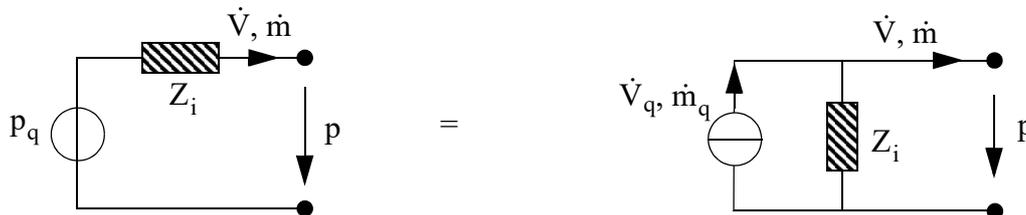
Volumenstromquelle,  
Massenstromquelle  
(Flussquelle)



### Reale Strömungsquellen

Verlust- und Speichervorgänge sind zu berücksichtigen

(z.B. Pumpen, Verdichter, Ventilatoren, Windkessel, Pumpspeicher,...)



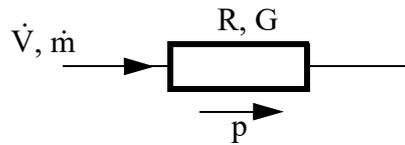
## 4.4.2 Hydrodynamische Verbraucherbauelemente

### 1. Reeller Strömungswiderstand, Leitwert

(repräsentiert die Leitungsverluste als Folge der inneren Reibung der Fluide)

Ursachen:

- Viskosität des Mediums
- Beschaffenheit der Strömungskanäle (z.B. Rohre)
  - Geometrie (Querschnitt, Form: Bogen, Krümmung)
  - Oberflächenrauigkeit



inkompressible Medien  
(Flüssigkeiten)

$$p = R \cdot \dot{V}$$

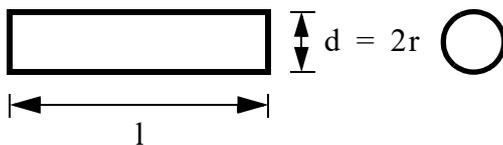
$$\dot{V} = G \cdot p$$

kompressible Medien (Gase)

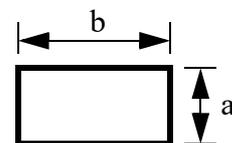
$$p = R \cdot \dot{m}$$

$$\dot{m} = G \cdot p$$

## Rohrelement



Querschnitte



Hydraulischer Durchmesser:  $d_h = \frac{a \cdot b}{2 \cdot (a + b)} = \frac{\text{Fläche}}{\text{Umfang}} = 2 \cdot r_h$

Hydraulisch:	$R = \frac{8 \cdot l \cdot \eta}{\pi \cdot r^4}$
Pneumatisch:	$R = \frac{8 \cdot l \cdot \eta}{\pi \cdot r^4 \cdot \rho}$

idealisiert  
(linearisiert)

Tatsächlich

$$R = f(\dot{V}) = f(\text{Re}, \text{Rauigkeit})$$

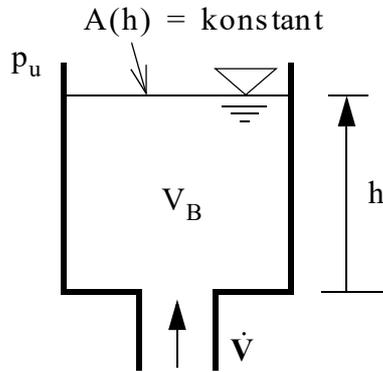
↑  
Reynoldszahl  $\text{Re} = \frac{w \cdot d}{\nu}$



## 2. Hydrodynamische Kapazität

Integraler Energiespeicher für Flußgrößen (repräsentiert Energiespeicherfähigkeit)

z.B. Pumpspeicher: (Umgebungsdruck  $p_u$  vernachlässigbar)



$$V_B = A \cdot h$$

$$\rightarrow \frac{dV_B}{dt} = A \cdot \frac{dh}{dt} = \dot{V}$$

$$\hookrightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{A} \cdot \int \dot{V} dt = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \int \dot{m} dt}$$

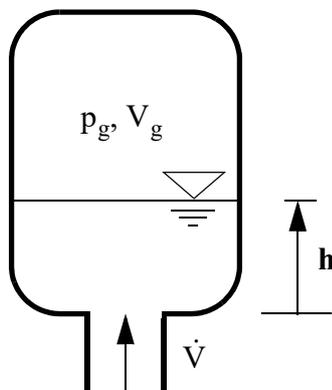
mit Druck am Zulauf (Behälterboden):

$$p = \rho \cdot g \cdot h \quad \rightarrow \quad p = \underbrace{\frac{\rho \cdot g}{A}}_{\frac{1}{C}} \cdot \int \dot{V} dt = \frac{g}{A} \cdot \int \dot{m} dt$$

Kapazität

$$\boxed{C = \frac{A}{\rho \cdot g}}$$

Windkessel (geschlossener Behälter mit Gasvolumen)



Voraussetzung:  $p_g \gg p_{fl}$

↓  
Flüssigkeitsdruck  
vernachlässigbar

$$V_g = V_0 - A \cdot h$$

$$\frac{dV_g}{dt} = -A \cdot \frac{dh}{dt} = -\dot{V}$$

## Zustand eines idealen Gases

$$p_g \cdot V_g = m_0 \cdot R \cdot T$$

Temperatur

Gaskonstante

Gasmasse

Bei isothermer Zustandsänderung ( $T = \text{konstant}$ ):

$$V_g = \frac{m_0 \cdot R \cdot T}{p_g} \quad \rightarrow \quad \frac{dV_g}{dt} = \frac{-m_0 \cdot R \cdot T}{p_g^2} \cdot \dot{p}_g$$

$$\dot{p}_g = \frac{p_g^2}{m_0 \cdot R \cdot T} \cdot \dot{V} \quad \rightarrow \quad p = \int \frac{p_g}{V_g} \cdot \dot{V} dt$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho}$$

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T}$$

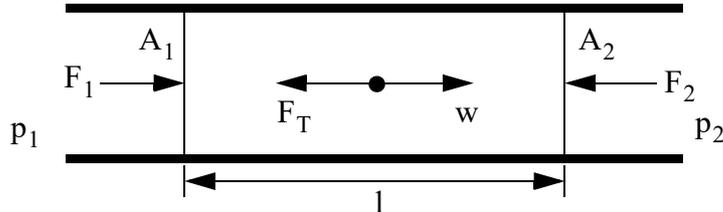
$$p = \underbrace{\frac{p_g}{V_g}}_{\frac{1}{C}} \cdot \int \dot{V} dt = \frac{R \cdot T}{V_g} \cdot \int \dot{m} dt$$

↳ Kapazität:  $C = \frac{\bar{V}_g}{\bar{p}_g}$  hydraulisch

$C = \frac{V_g}{R \cdot T} = \frac{m_0}{p_g}$  pneumatisch

### 3. Hydrodynamische Induktivität

Differentieller Energiespeicher für Flußgrößen (repräsentiert die kinetische Energiespeicherfähigkeit durch die wirksamen Trägheitskräfte instationär strömender Fluide in Kanälen)



Kräftegleichgewicht am bewegten Fluidmasse-Element:

$$F_p + F_T = 0$$

Druckkraft      Trägheitskraft

$$F_1 - F_2 - F_T = 0$$

$$A_1 = A_2 = A$$

$$p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 - m \cdot \dot{w} = 0$$

$$(p_1 - p_2) \cdot A = \rho \cdot v \cdot \dot{w} \quad \rightarrow \quad \Delta p \cdot A = \rho \cdot l \cdot A \cdot \dot{w} \quad \text{mit } A \cdot w = \dot{V}$$

$$\hookrightarrow \Delta p \cdot A = \rho \cdot l \cdot (\dot{V})$$

$$\Delta p = \underbrace{\frac{\rho \cdot l}{A}}_L \cdot (\dot{V})$$

**D-Glied**

#### Induktivität

hydraulisch:  $L = \frac{\rho \cdot l}{A}$

kreisförm. Rohr:  $L = \frac{\rho \cdot l}{\pi \cdot r^2}$

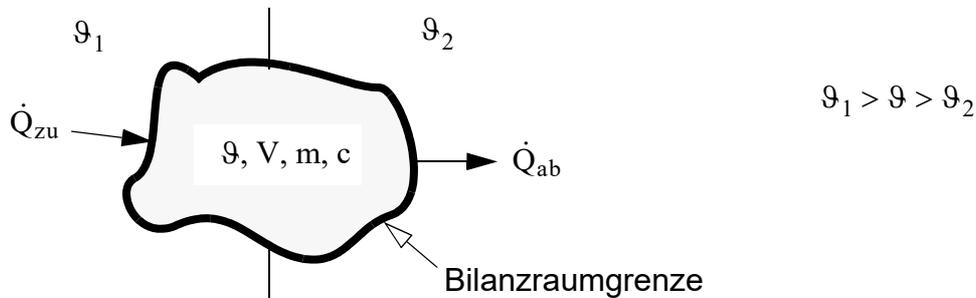
pneumatisch:  $L = \frac{1}{A}$

kreisförm. Rohr:  $L = \frac{1}{\pi \cdot r^2}$

## 4.5 Thermische Systeme

Beschreibung von Wärmetransport- und Speichervorgängen an und über Grenzflächen von und in Bilanzräumen fester, flüssiger und gasförmiger Stoffe

### Grundlagen



### Innere Energie

$$\boxed{U = c \cdot m \cdot \vartheta} \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dt} = m \cdot c \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = m \cdot c \cdot \dot{\vartheta}$$

Änderung der inneren Energie durch Wärmetransport

### Energiebilanz

#### 1. Hauptsatz

$$\boxed{\dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} = m \cdot c \cdot \dot{\vartheta}}$$

### Kinetik

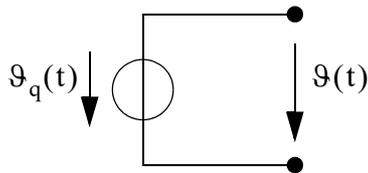
#### 2. Hauptsatz

$$\boxed{\dot{Q} = k \cdot \Delta\vartheta} \quad \text{z.B.} \quad \begin{aligned} \dot{Q}_{zu} &= k_1 \cdot (\vartheta_1 - \vartheta) \\ \dot{Q}_{ab} &= k_2 \cdot (\vartheta - \vartheta_2) \end{aligned}$$

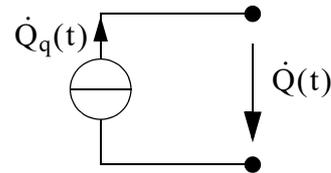
## 4.5.1 Thermische Quellen

**Ideale** thermische Quellen

Temperaturquelle



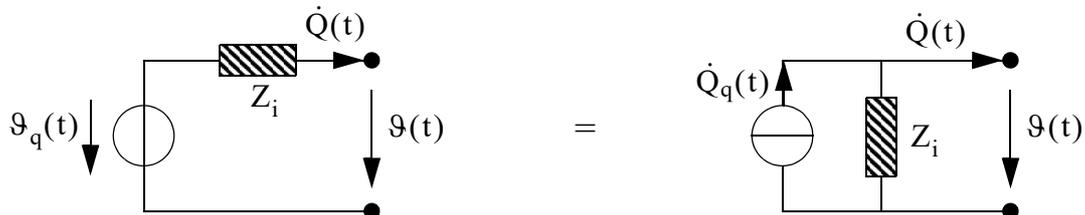
Wärmestromquelle



**Reale** thermische Quellen

Thermische **Widerstand**- und **Speicher**vorgänge sind zu berücksichtigen

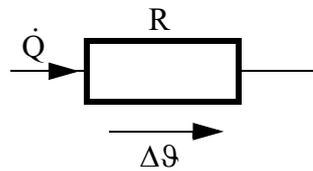
( -> Ergänzung der idealen Quellen durch zusätzliche Impedanzen )



Beispiele: Flammen, Öfen, Heiz-Kühlelement, Halbleiter (Verlustleistung),...

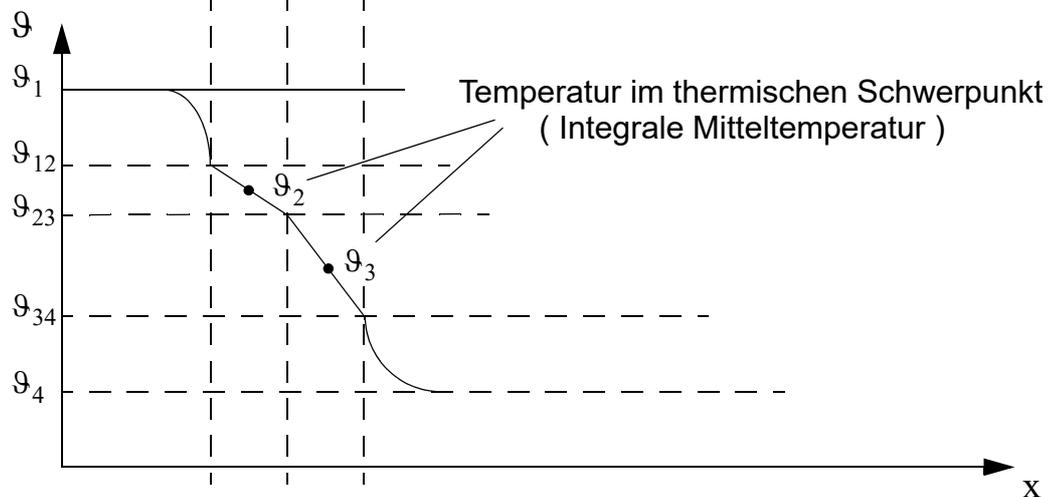
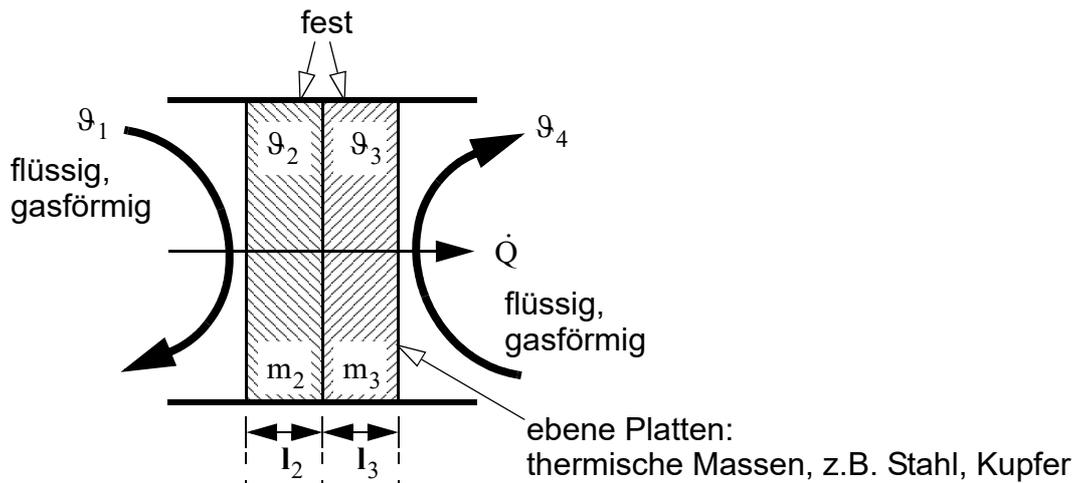
## 4.5.2 Thermische Verbraucherelemente

### 1. Wärmeübergangswiderstand , Wärmeleitwert

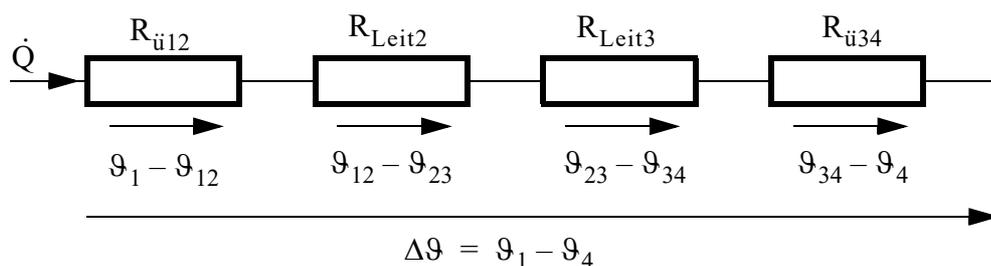


$$\Delta\vartheta = R \cdot \dot{Q}$$

$$\dot{Q} = G \cdot \Delta\vartheta$$



Ersatzschaltung:



## Gesamter Wärmedurchgangswiderstand

$$R_{\text{ges}} = R_{\text{ü}, 12} + R_{\text{Leit}, 2} + R_{\text{Leit}, 3} + R_{\text{ü}, 34}$$

↑
↑
↑
↑

Wärmeübergangswiderstand
Wärmedurchgangswiderstand

Mit:  $\dot{Q} = \alpha_1 \cdot A \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_{12})$

$$\dot{Q} = \alpha_2 \cdot A \cdot (\vartheta_{12} - \vartheta_{23})$$

$$\dot{Q} = \alpha_3 \cdot A \cdot (\vartheta_{23} - \vartheta_{34})$$

$$\dot{Q} = \alpha_4 \cdot \underbrace{A}_{\text{Fläche}} \cdot (\vartheta_{34} - \vartheta_4)$$

## Wärmeübergangskoeffizient (allgemein)

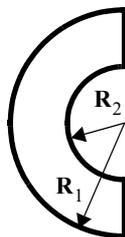
Ebene Wand:



$$\alpha = \frac{\lambda}{d_w}$$

Wärmeleitkoeffizient  
(Materialeigenschaft)  
 ↙ ↘  
 ↙ ↘  
 Wanddicke

Gekrümmte Wand:



$$\alpha = \frac{\lambda}{R_1 \cdot \ln \frac{R_1}{R_2}}$$

Grenzschicht:

$$\alpha = f(\text{Re})$$

↑  
 Grenzschichtbedingungen

↳ Wärmeleitwert

$$G = \alpha \cdot A$$

↳  $G_{\text{Leit}} = \frac{\lambda}{d_W} \cdot A$

$$G_{\ddot{u}} = \alpha(\text{Re}) \cdot A$$

↳  $\frac{1}{G_{\text{g14}}} = \frac{1}{k \cdot A} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot A} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A} + \frac{1}{\alpha_3 \cdot A} + \frac{1}{\alpha_4 \cdot A}$

↳  $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_s} + \frac{1}{\alpha_4}$

Wärmewiderstand

$$\Rightarrow R = \frac{1}{G} = \frac{1}{\alpha \cdot A}$$

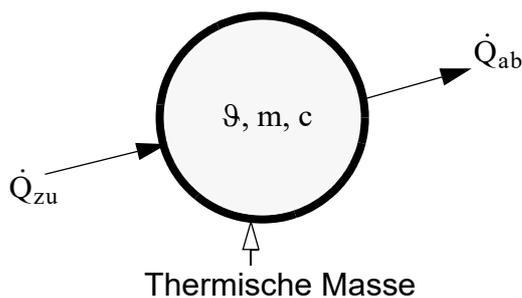
↳  $R_{\text{Leit}} = \frac{d_W}{\lambda \cdot A}$

$$R_{\ddot{u}} = \frac{1}{\alpha(\text{Re}) \cdot A}$$

k Wärmedurchgangskoeffizient

## 2. Wärmekapazität

Jede thermische Masse besitzt eine Wärmekapazität (-> Integraler thermischer Energiespeicher: repräsentiert die Fähigkeit, Wärme zu speichern)



Aus Energiebilanz:  
(1. Hauptsatz)

$$m \cdot c \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{Q}_{\text{zu}} - \dot{Q}_{\text{ab}}$$

$$\vartheta(t) = \underbrace{\frac{1}{m \cdot c}}_{\frac{1}{C}} \cdot \int (\dot{Q}_{\text{zu}} - \dot{Q}_{\text{ab}}) dt$$

↳ **I-Glied**

↳ Kapazität

$$C = m \cdot c$$

m thermische Masse

c spezifische Wärmekapazität

## Bemerkung:

In der Praxis sind thermische Systeme immer ortsverteilte Systeme, d.h. es existiert ein ortsabhängiges Temperaturprofil. (Vollständige Temperaturmodelle sind eigentlich partielle Differentialgleichungen)

Es kann das Temperaturverhalten durch eine ortsabhängige Diskretisierung angenähert (approximiert) werden. Die Ortsdiskreten Temperaturen können als Zustandsgrößen der diskreten thermischen Masse-Elemente betrachtet werden.

→ Hier:

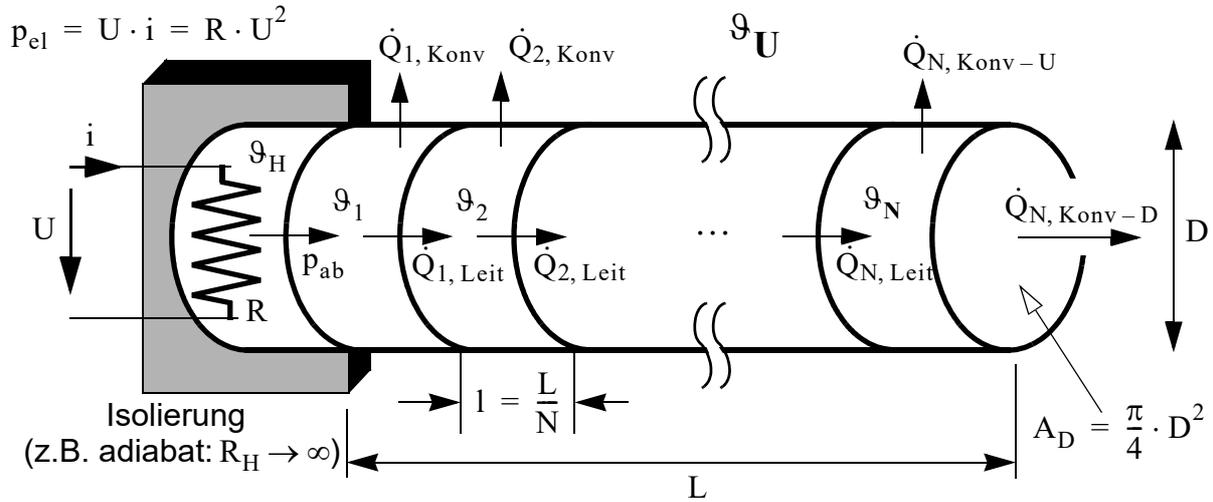
Gleichungen sind konzentrierte Modelle, d.h. Temperatur  $\vartheta(t)$  der thermischen Masse entspricht der mittleren Temperatur im thermischen Schwerpunkt, (siehe Plattenmodell).

### 3. Thermische Induktivität

Existiert in der realen Welt nicht !

Bsp.: **Kupferstab**

Instationäre Wärmeleitung (eindimensional)



**Netzwerk - Ersatzmodell**

→ Verteiltes System

Diskretisierung in ein Heizelement und N Abschnitte des Kupferstabes

Bilanz am thermischen Heiz-Massenelement (Heizquelle) :

$$p_{el} - p_{ab} = \frac{dU_H}{dt} = m_H \cdot c_H \cdot \frac{d\vartheta_H}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$\dot{Q}_{H, Leit} = \frac{\lambda_H}{l_H} \cdot A_D \cdot (\vartheta_H - \vartheta_1) \quad \text{mit } A_D = \frac{\pi}{4} \cdot D^2$$

$$\downarrow$$

$$\dot{\vartheta}_H = \frac{1}{m_H \cdot c_H} \cdot \left( p_{el} - \frac{\lambda_H}{l_H} \cdot A_D \cdot (\vartheta_H - \vartheta_1) \right)$$

→ Differentialgleichungen der Kupferstab-Elemente:

1. Element:

$$P_{ab} - \dot{Q}_{1, \text{Konv}} - \dot{Q}_{1, \text{Leit}} = \frac{dU_1}{dt} = m \cdot c \cdot \frac{d\vartheta_1}{dt}$$

$\dot{Q}_{1, \text{Konv}} \rightarrow \frac{\lambda_H}{l_H} \cdot A_D \cdot (\vartheta_H - \vartheta_1)$

$\dot{Q}_{1, \text{Leit}} \rightarrow \frac{\lambda}{l} \cdot A_D \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2)$

$\alpha \cdot A \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_U)$ 
mit  $A = \pi \cdot D \cdot l$

$$1: \quad \dot{\vartheta}_1 = \frac{1}{m \cdot c} \cdot \left( \frac{\lambda_H}{l_H} \cdot A_D \cdot (\vartheta_H - \vartheta_1) - \alpha \cdot A \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_U) - \frac{\lambda}{l} \cdot A_D \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) \right)$$

⋮

i-tes Element:

$$i: \quad \dot{\vartheta}_i = \frac{1}{m \cdot c} \cdot \left( \frac{\lambda}{l} \cdot A_D \cdot (\vartheta_{i-1} - \vartheta_i) - \alpha \cdot A \cdot (\vartheta_i - \vartheta_U) - \frac{\lambda}{l} \cdot A_D \cdot (\vartheta_i - \vartheta_{i+1}) \right)$$

$i = 2 \div N - 1$

⋮

N-tes Element:

$$N: \quad \dot{\vartheta}_N = \frac{1}{m \cdot c} \cdot \left( \frac{\lambda}{l} \cdot A_D \cdot (\vartheta_{N-1} - \vartheta_N) - \alpha \cdot A \cdot (\vartheta_N - \vartheta_U) - \alpha \cdot A_D \cdot (\vartheta_N - \vartheta_U) \right)$$

## Übersicht: Ersatz-Netzwerkbauelemente verschiedener Technischer Systeme

System \ Kenngroße	Potential-variable $\varepsilon(t)$	Fluss-variable $\Phi(t)$	Widerstand $R = \frac{\varepsilon(t)}{\Phi(t)}$	Kapazität $C = \frac{\int \Phi(t) dt}{\varepsilon(t)}$	Induktivität $L = \frac{\varepsilon(t)}{\dot{\Phi}(t)}$	Symbole
<b>Elektrisch</b>	Spannung $u$	Strom $i$	El. Widerstand $R = \rho \frac{l}{A}$	El. Kapazität $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{l}$	El. Induktivität $L = \mu_0 \mu_r N^2 \cdot \frac{A}{l}$	
<b>Mechanisch</b> - Translation  - Rotation	Geschwindigkeit $v$	Kraft $F$	Mech. Widerstand $R_T = d_T^{-1}$	Mech. Kapazität $C = m$ (Masse)	Mech Induktivität (inv.Federkonst.) $L_T = c_T^{-1}$	$d_T^{-1}, d_R^{-1}$ R $m, J$ C
	Winkelgeschwindigkeit $\omega$	Moment $M$	(inverse Dämpfung) $R_R = d_R^{-1}$	$C = J$ (Massenträgheitsmoment)	(Nachgiebigkeit) $L_R = c_R^{-1}$	$c_T^{-1}, c_R^{-1}$ L
<b>Hydraulisch</b>	Druck $p$	Volumenstrom $\dot{V}$	Strömungswiderstand $R = \frac{8 \cdot s \cdot \eta}{\pi \cdot r^4}$	Speicherkapazität $C = \frac{A}{\rho \cdot g}$	Trägheit $L = \frac{\rho \cdot s}{\pi \cdot r^2}$	$2r$ R, L C
<b>Pneumatisch</b>	Druck $p$	Volumenstrom $\dot{V}$ (Massenstrom) $\dot{m} = \rho \dot{V}$	Strömungswiderstand $R = \frac{8 \cdot s \cdot \eta}{\pi \cdot r^4 \cdot \rho}$	$C = \frac{m_0}{p_0} = \frac{V}{R \cdot T}$	Trägheit $L = \frac{s}{\pi \cdot r^2}$	$2r$ R, L C $V, T, m_0, p_0$
<b>Thermisch</b>	Temperatur $T$	Wärmestrom $\dot{Q}$	Wärmewiderstand $R_{Leit} = \frac{s}{\lambda \cdot A}$  $R_{Konv} = \frac{1}{\alpha \cdot A}$	Thermische Kapazität  $C = m \cdot c$	<b>existiert nicht !</b>	$R_{Leit}$ $R_{Konv}$  $m, c$ C

## Abkürzungen: Thermodynamische Grössen

<u>Grösse</u>		<u>Bezeichnung</u>	<u>Einheit</u>
A	Fläche	$m^2$	
c	spezifische Wärmekapazität	$J/(kg\ K)$	
$c_p$	isobare spezifische Wärmekapazität	$J/(kg\ K)$	
$c_v$	isochore spezifische Wärmekapazität	$J/(kg\ K)$	
g	Erdbeschleunigung	$m/s^2$	
H	Enthalpie	$J = N\ m$	Joule
h	Spezifische Enthalpie	$J/kg$	
p	Druck	$Pa = N/m^2$	Pascal
m	Masse	kg	
$\dot{m}$	Massenstrom	kg/s	
$\dot{Q}$	Wärmestrom	$W = J/s$	Watt
Q	Thermische Energie	J	Joule
R	individuelle Gaskonstante	$J/(kg\ K)$	
S	Entropie	W/K	
T	Absoluttemperatur	K	Kelvin
U	Innere Energie	J	
u	spezifische innere Energie	$J/kg$	
v	Spezifisches Volumen	$m^3/kg$	
V	Volumen	$m^3$	
$\dot{V}$	Volumenstrom	$m^3/s$	
w	Geschwindigkeit	m/s	
$\vartheta = (T/[K] - 273,15)^\circ C$	Temperatur	$^\circ C$	Celsius
$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient	$Watt/(m^2\ K)$	
$\lambda$	Wärmeleitkoeffizient	$Watt/(m\ K)$	
$\chi$	Isentropenexponent		
$\rho = m/V$	Dichte	$kg/m^3$	
$\mu$	Durchflussbeiwert		
$\nu$	Kinematische Viskosität	$m^2/s$	
$\eta = \rho \cdot \nu$	dynamische Viskosität	$Pa \cdot s$	
$Re = \frac{w \cdot L}{\nu}$	Reynoldszahl		