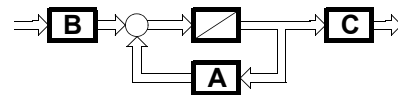


# Systemdynamik

## Einführung der Zustandsraumverfahren

1. Übersicht
2. Modellbildung
3. Analyse
4. Regler- und Beobachtersynthese
5. Simulation
6. Entwicklungstool MATLAB/Simulink



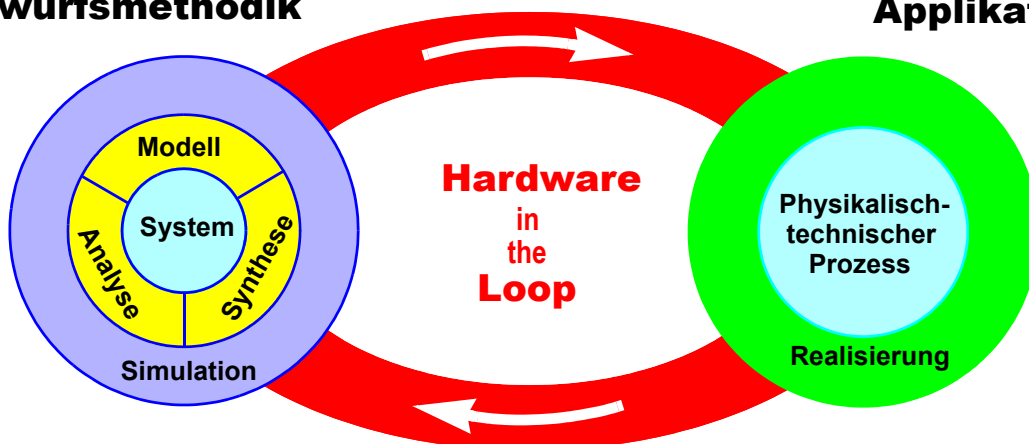
### Laborübungen mit Anwendungsbeispielen:

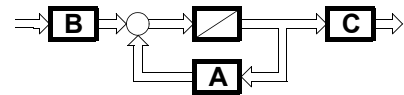
Servoantrieb, Magnetfeldregelung, Verladekran,  
 Mehrgrößenfüllstandsregelung, Temperaturregelung, . . .

## Entwicklungsprozess

Entwurfsmethodik

Applikation

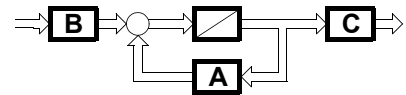




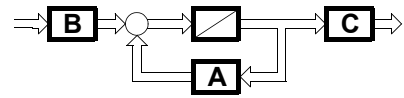
## Vorwort

Die vorliegenden Unterlagen dienen als Ergänzung zur Lehrveranstaltung „**Systemdynamik**“ (4 Std Vorlesung), die ich für Studierende aller technischen Studiengänge an der Hochschule Heilbronn anbiete. Die Inhalte werden nicht in einem vollständigen Manuskript dargestellt. Es werden nur die wesentlichen Beziehungen und Zusammenhänge in einem Abstrakt zusammengefasst. Dieser Umdruck kann weder ein einschlägiges ausführliches Lehrbuch noch die Präsenz in der Lehrveranstaltung ersetzen. Es liegt lediglich eine die eigene Vorlesungsmitschrift ergänzende inhaltliche Zusammenfassung vor, die bei der Vorbereitung auf die Prüfung und für das Gesamtverständnis hilfreich sein kann.

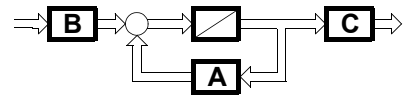
Die Lehrveranstaltung setzt eine Grundlagenvorlesung der klassischen Regelungstechnik voraus, die üblicherweise die Betrachtung von Regelungssystemen im Frequenzbereich abdeckt. Die inhaltlichen Schwerpunkte dieser Lehrveranstaltung liegen auf dem Gebiet der Zeitbereichsmethodik. Die Behandlung von dynamischen Systemen mit den **Zustandsraumverfahren** steht im Mittelpunkt der theoretisch methodischen Wissensvermittlung. Die Effizienz und Leistungsfähigkeit dieser Verfahren bei der praktischen Anwendung im Berufsalltag steht und fällt mit der Beherrschung leistungsfähiger Entwicklungstools auf einem Digitalrechner. Im Übungs- und Laborbetrieb wird das in der Regelungstechnik weitverbreitete Tool MATLAB/Simulink eingesetzt. Es wird von Anfang an mit den einzelnen aufeinander abgestimmten und verzahnten Elementen der Lehrveranstaltung (Vorlesung, Übung, Laborprojekt) angestrebt, eine ganzheitliche Betrachtungsweise eines gesamten Entwicklungsprozesses in den einzelnen Schritten Modellbildung, Analyse, Synthese, Simulation und Realisierung gemäß der Übersicht auf dem Deckblatt zu erreichen. Die Beherrschung der Theorie und die Fähigkeit der effizienten, praktischen Umsetzung und Realisierung der methodischen Erkenntnisse sind wesentliche Merkmale eines gut ausgebildeten, zukunftsorientierten Entwicklungsingenieurs. Durch die universelle Anwendbarkeit der vorgestellten Verfahren auf alle technischen Gebiete wird eine disziplinübergreifenden Systemdenkweise gefördert, die die Flexibilität des Einsatzes in verschiedenen Anwendungsbereichen enorm vergrößert und ausgezeichnete Zukunftchancen in einem sich hoch dynamisch verändernden technischen Umfeld eröffnet. Mit Sicht auf ein ganzes Berufsleben wird sich nur der Teil des Wissen als sinnvoll, effizient und auf Dauer tragfähig erweisen, der auf naturwissenschaftlichen unveränderbaren Grundlagenprinzipien aufgebaut ist. Es steht dabei nicht im Mittelpunkt der Ausbildung, möglichst viel Faktenwissen mit hoher Aktualität aber mit extrem geringer Halbwertszeit zu lernen, sondern es ist sehr viel wichtiger die Zusammenhänge methodengestützt zu verstehen. Es wird in dieser Lehrveranstaltung versucht, diese Grundsätze verstärkt zu verfolgen.



1	Übersicht.....	1
2	Modellierung im Zustandsraum .....	1
2.1	Einführung von Zustandsgrößen.....	1
2.1.1	Modellbildung direkt im Zeitbereich .....	4
2.1.2	Modellbildung aus einer Übertragungsfunktion.....	5
2.1.3	Modellbildung aus einem Strukturbild .....	5
2.2	Zustandsgleichungen und Übertragungsfunktion .....	6
2.3	Modellübersicht .....	8
2.3	.....	8
3	Analyse im Zustandsraum .....	1
3.1	Einführung wichtiger Grundbegriffe .....	1
3.1.1	Eigenwerte .....	1
3.1.2	Eigenvektoren .....	1
3.1.3	Steuerbarkeit.....	2
3.1.4	Beobachtbarkeit.....	3
3.2	Strukturanalyse, Transformationen .....	4
3.2.1	Jordan-Normalform.....	5
3.2.2	Regelungsnormalform.....	7
3.2.3	Beobachtungsnormalform.....	9
3.3	Lösung der Zustandsgleichung.....	11
3.4	Stabilität .....	13
4	Synthese im Zustandsraum .....	1
4.1	Zustandsrückführung über Zustandsregler .....	1
4.1.1	Polvorgabe-Regler.....	3
4.1.2	Riccati-Regler .....	4
4.1.3	Deadbeat-Regler.....	5
4.2	Ausgangsrückführung über Zustandsbeobachter .....	7
4.2.1	Analogie zwischen Regler- und Beobachterentwurf .....	10
4.3	PI-Zustandsregelung.....	11
4.4	Entkopplungsregelung dynamischer Mehrgrößensysteme.....	13
4.4.1	Lineare Ausgangsentkopplungsregelung im Zustandsraum (Zeitbereich).....	14
4.4.2	Nichtlineare Ausgangsentkopplungsregelung im Zustandsraum .....	18
4.4.3	Ausgangsentkopplung mit Übertragungsmatrix (Frequenzbereich).....	23
5	Simulation .....	1
5.1	Abtastsysteme.....	1
5.2	Testfunktionen.....	3



1	Anhang .....	1
1.1	Abkürzungen .....	1
1.2	Literatur .....	2



# 1 Übersicht

## Systemdynamik

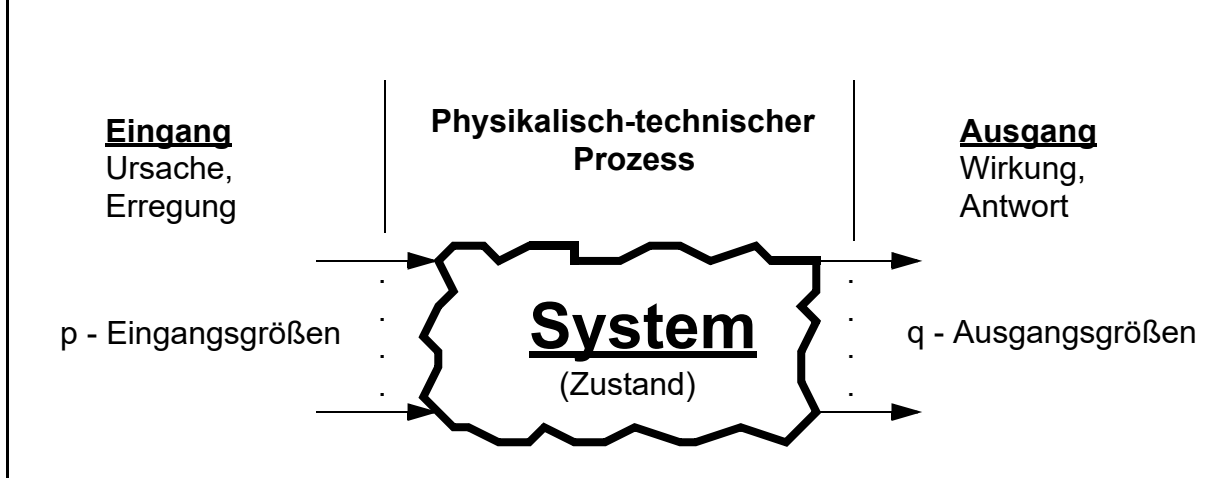
ist ein methodisches Grundlagengebiet auf dem die Automatisierungstechnik bzw. die Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik aufbaut.

Fachübergreifende Ingenieurdisziplin in der

- Elektrotechnik, Elektronik
- Nachrichtentechnik, Informationsverarbeitung
- Maschinenbau, Fahrzeugtechnik, Antriebstechnik
- Produktionstechnik
- Verfahrenstechnik, Energietechnik, Anlagenbau
- Chemie
- Luft- und Raumfahrt
- ...

### Aufgabenstellung und Zielsetzung:

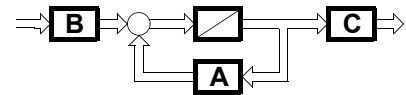
Modellierung, Analyse, Synthese und Realisierung technischer Systeme und Komponenten mit *definiertem Zeitverhalten* und *'optimaler' Dynamik*.



## Modellierung

Abbildung des dynamischen Verhaltens eines Systems oder einer Komponente mit Hilfe mathematischer Modelle im

- Zeitbereich (Variable ist Zeit  $t$ )  
 ==> reelles Modell: Differentialgleichungssystem (DGL-System)

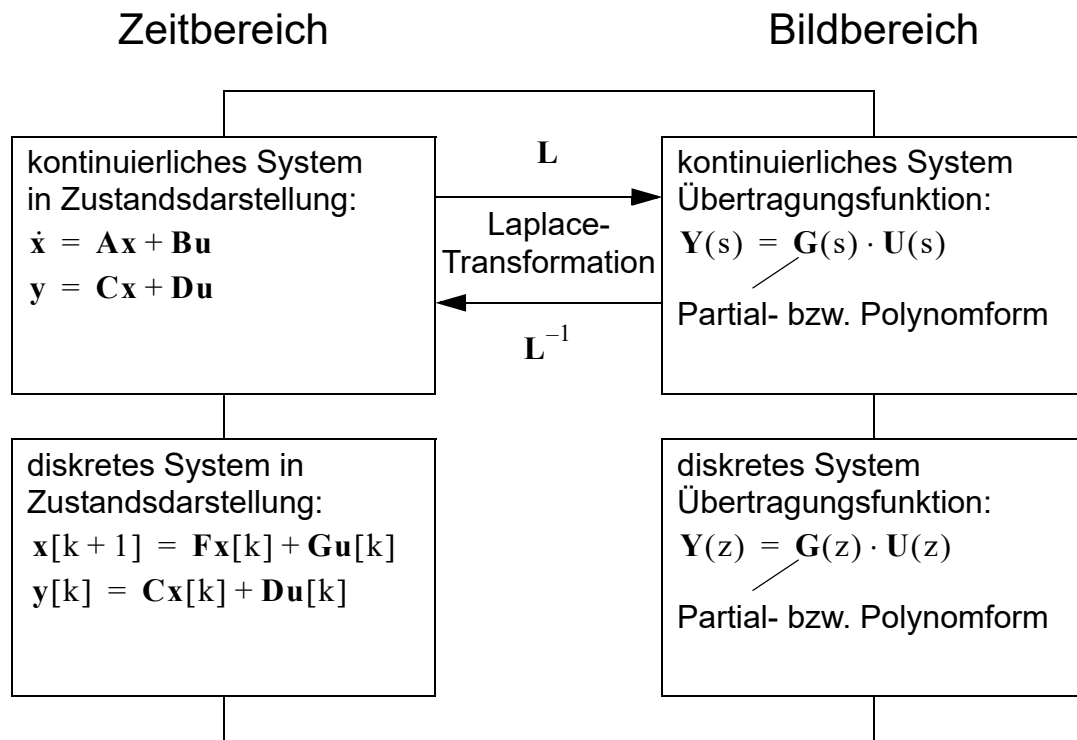


**Spezielle Klasse der Linearen Systeme:**

==> Inhomogene, gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme in verschiedenen Darstellungsformen

**Mathematische Modelle**

$$a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y = b_m \cdot u^{(m)} + \dots + b_1 \cdot \dot{u} + b_0 \cdot u$$



**Analyse**

gegeben: Eingang, System

gesucht: Ausgang

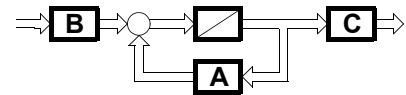
**Synthese**

gegeben: Eingang, Ausgang

gesucht: System

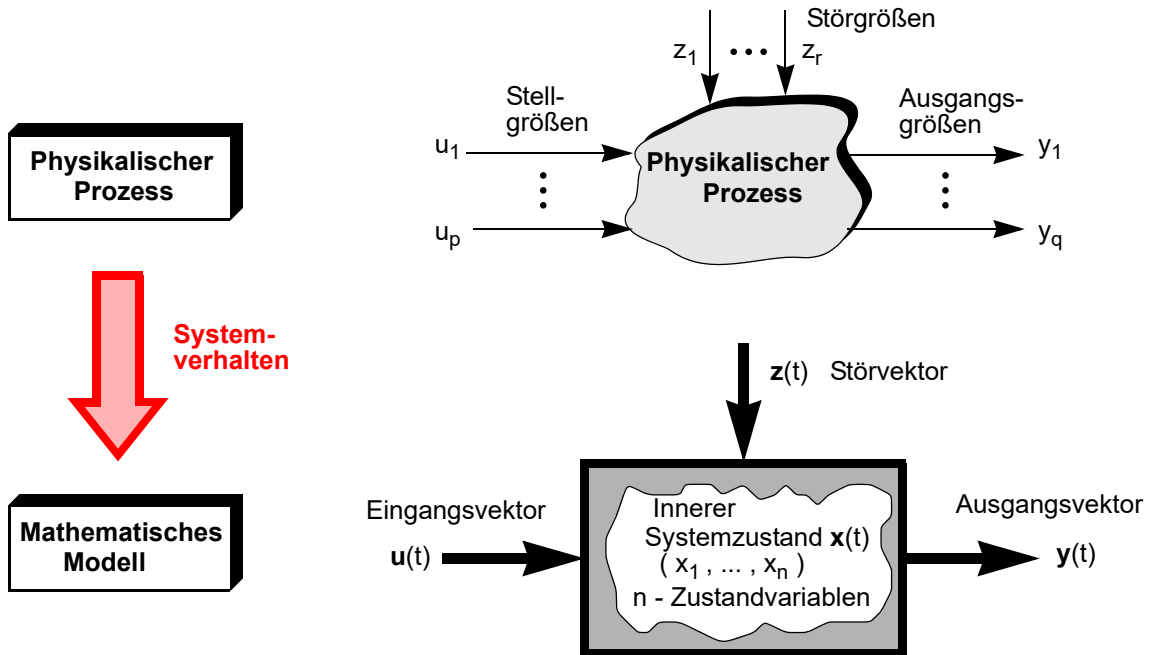
**Realisierung**

Technische Umsetzung des Systementwurfs unterstützt durch Hardware in the Loop-Konzepte (HIL)



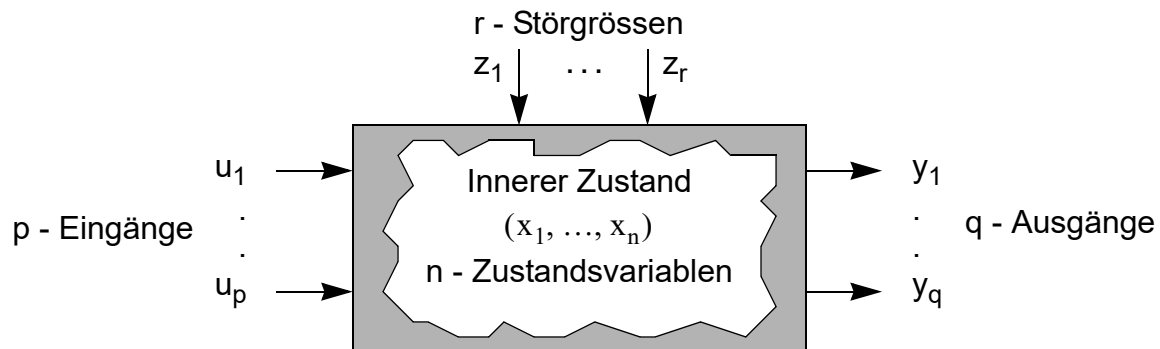
## 2 Modellierung im Zustandsraum

Abbildung des physikalischen Prozesses in einem mathematischen Modell



### 2.1 Einführung von Zustandsgrößen

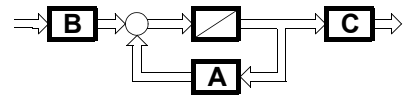
Innerer Energiezustand wird beschrieben mit  $n$  - Zustandsvariablen, die ein



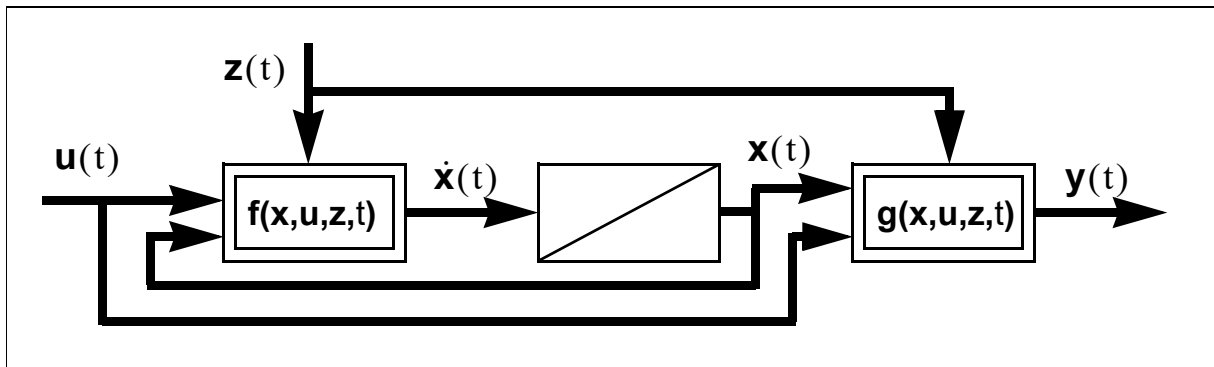
Koordinatensystem bzw. den Zustandsraum bilden. Die Änderung des Zustands:

**==> Nichtlineares Modell in Zustandsdarstellung (Zustandsgleichungen)**  
(Kurzschreibweise in Vektorform: allgemeinste Modellform im Zeitbereich)

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}, t) \quad \text{Zustandsvektordifferentialgleichung} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X}^n$
$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}, t) \quad \text{Ausgangsvektorgleichung}$



## Nichtlineares Strukturbild (Blockschaltbild):



## Lineare Systeme (Spezielle Klasse):

Besondere Bedeutung für methodische Behandlung, da abgeschlossene Systemtheorie verfügbar. (Werkzeug: Matrizenrechnung)

Matrizenschreibweise der **Zustandsgleichungen** für ein allgemeines System mit

- Systemordnung:  $n$
- Anzahl der Eingänge:  $p$
- Anzahl der Ausgänge:  $q$

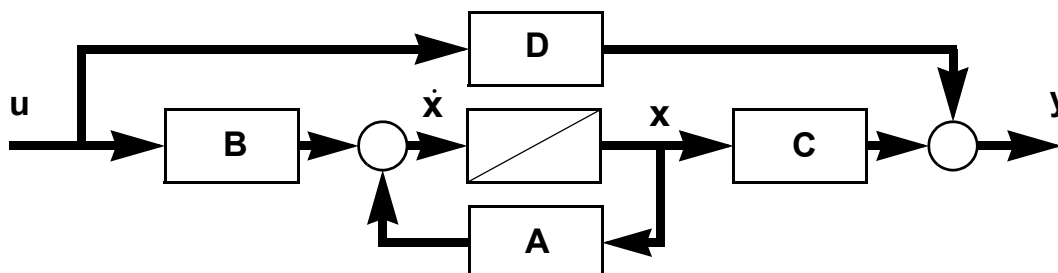
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad \text{Zustandsdifferentialgleichung}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \quad \text{Ausgangsgleichung}$$

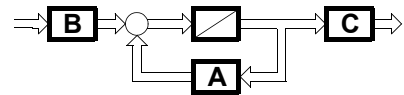
**Zustandsgleichungen**

- $\mathbf{A}(n,n)$  Systemmatrix
- $\mathbf{B}(n,p)$  Eingangsmatrix
- $\mathbf{C}(q,n)$  Ausgangsmatrix
- $\mathbf{D}(q,p)$  Durchgangsmatrix

## Strukturbild der linearen Zustandsgleichungen:



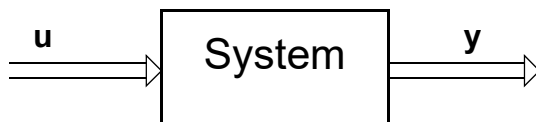




## Eigenschaften der Zustandsdarstellung

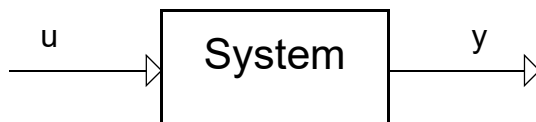
- Innere Systemstruktur (Kopplungen) leicht überschaubar
- Mehrgrößensystem geschlossen darstellbar
- Optimale Aufbereitung für Verarbeitung mit Digitalrechner
- Lösung der Zustandsgleichungen geschlossen möglich
- Stabilität, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit exakt definiert
- Übergang zur klassischen Frequenzbereichsdarstellung relativ einfach

**MIMO-System** (Multiple Input Multiple Output) ==> Mehrgrößensystem

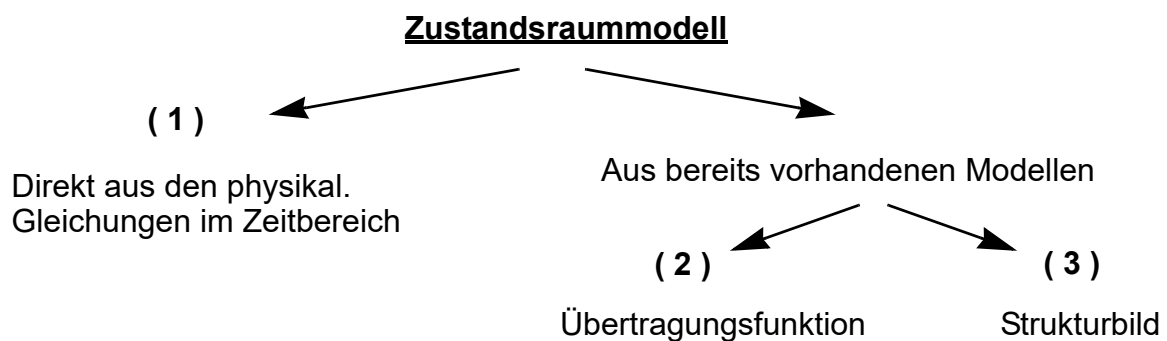


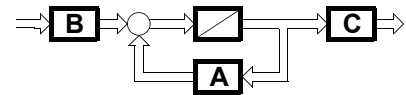
Spezialfall:

**SISO-System** (Single Input Single Output) ==> Eingrößensystem:  $p = 1, q = 1$



Es gibt grundsätzlich verschiedene Wege ein **Zustandsraummodell** aufzustellen





### 2.1.1 Modellbildung direkt im Zeitbereich

Beispiel: Bildung eines Zustandsraummodells eines linearen Systems n-ter Ordnung mit einer Eingangsgröße und einer Ausgangsgröße.

Gegebenes Modell: Inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y = b_m \cdot u^{(m)} + \dots + b_1 \cdot \dot{u} + b_0 \cdot u$$

mit:  $n \geq m$  Kausalitätsbedingung

In einem Zustandsraummodell dürfen keine Ableitungen des Eingangs  $u$  explizit auftreten. Man muss deshalb hier auf die Modellierung von Systemen mit zeitlichen Ableitungen des Eingangs verzichten

==> Daraus ergibt sich hier die Einschränkung ( $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ )

$$\Rightarrow y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y = b_0 \cdot u$$

#### 1.Schritt: Wahl der Zustandsvariablen

$$x_1 = y \quad \text{algebraische Ausgangsgleichung}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{y} \quad n \text{ Differentialgleichungen 1.Ordnung}$$

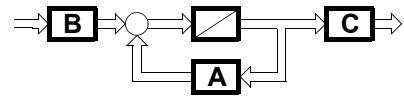
$$\dot{x}_2 = x_3 = \ddot{y}$$

⋮

$$\dot{x}_{n-1} = x_n = y^{(n-1)} \quad ( \rightarrow \dot{x}_n = y^{(n)} )$$

$$\dot{x}_n = -a_{n-1} \cdot x_n - a_{n-2} \cdot x_{n-1} - \dots - a_1 \cdot x_2 - a_0 \cdot x_1 + b_0 \cdot u$$

==> Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung ist immer darstellbar in n Differentialgleichungen 1. Ordnung



2.Schritt: Ordnen in Matrizenschreibweise

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b_0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u$  Zustandsdifferentialgleichung

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

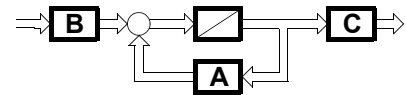
$y = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}$  Ausgangsgleichung

### 2.1.2 Modellbildung aus einer Übertragungsfunktion

... s. Vorlesung

### 2.1.3 Modellbildung aus einem Strukturbild

... s. Vorlesung



## 2.2 Zustandsgleichungen und Übertragungsfunktion

<b>Modell im Zeitbereich</b>	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad L \quad} \\ \text{Laplace - Transformation} \\ \xleftarrow{\quad L^{-1} \quad} \end{array}$	<b>Modell im Bildbereich</b>
<p>( Variable: <math>t</math> reell )</p> $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$ $\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$ $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$		<p>( Variable: <math>s = \delta + j \cdot \omega</math> komplex )</p> $\mathbf{s} \cdot \underline{\mathbf{X}}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{U}}(s)$ $\underline{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{C} \cdot \underline{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{D} \cdot \underline{\mathbf{U}}(s)$ <p>mit <math>\underline{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{L}\{\mathbf{x}(t)\};</math>  <math>\underline{\mathbf{U}}(s) = \mathbf{L}\{\mathbf{u}(t)\};</math>  <math>\underline{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{L}\{\mathbf{y}(t)\}</math>  <math>\mathbf{L}</math> Laplace Operator</p>

Umformung im Bildbereich

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \underline{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{U}}(s)$$

$$\rightarrow \underline{\mathbf{X}}(s) = \underbrace{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}} \cdot \mathbf{x}_0 + (\mathbf{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{U}}(s)$$

Mit  $\underline{\Phi}(s) = \underbrace{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}}$  **Transitionsmatrix** im Bildbereich

$$\underline{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \cdot (\mathbf{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{U}}(s) + \mathbf{D} \cdot \underline{\mathbf{U}}(s)$$

Vorteil: algebraische Gleichung

--> 2 Anteile: Anfangswertterm (Homogener Lösungsanteil)  
 Anregungsterm (Inhomogener Lösungsanteil)

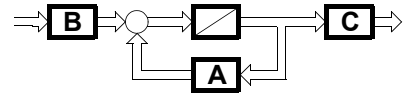
Für

$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  ergibt sich:

$$\underline{\mathbf{Y}}(s) = (\mathbf{C} \cdot (\mathbf{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}) \cdot \underline{\mathbf{U}}(s)$$

mit der **Übertragungsmatrix** (Frequenzgangmatrix für  $s = j \cdot \omega$  )

$$\underline{\mathbf{G}}(s) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}$$



Existenzbedingung

$$\det(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & s - a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

--> Nennerpolynom n-ter Ordnung von  $\underline{G}(s)$

$$\underline{N}(s) = \det(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0$$

entspricht dem charakteristischen Polynom

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

der Systemmatrix  $\mathbf{A}$

--> **charakteristische Gleichung**  $\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$  liefert n Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (n Eigenwerte)

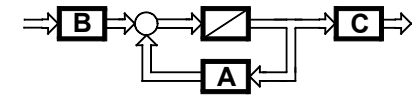
==> Eigenwerte der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  sind identisch mit den Polen der Übertragungsfunktion ( $\underline{N}(s) = 0$ )  
(Vorsicht: eventuell kann Pol durch Nullstelle gekürzt werden;  
Anzahl der Pole  $\leq$  Anzahl der Eigenwerte)

Spezialfall: **SISO-System** ( $p = 1, q = 1$ )

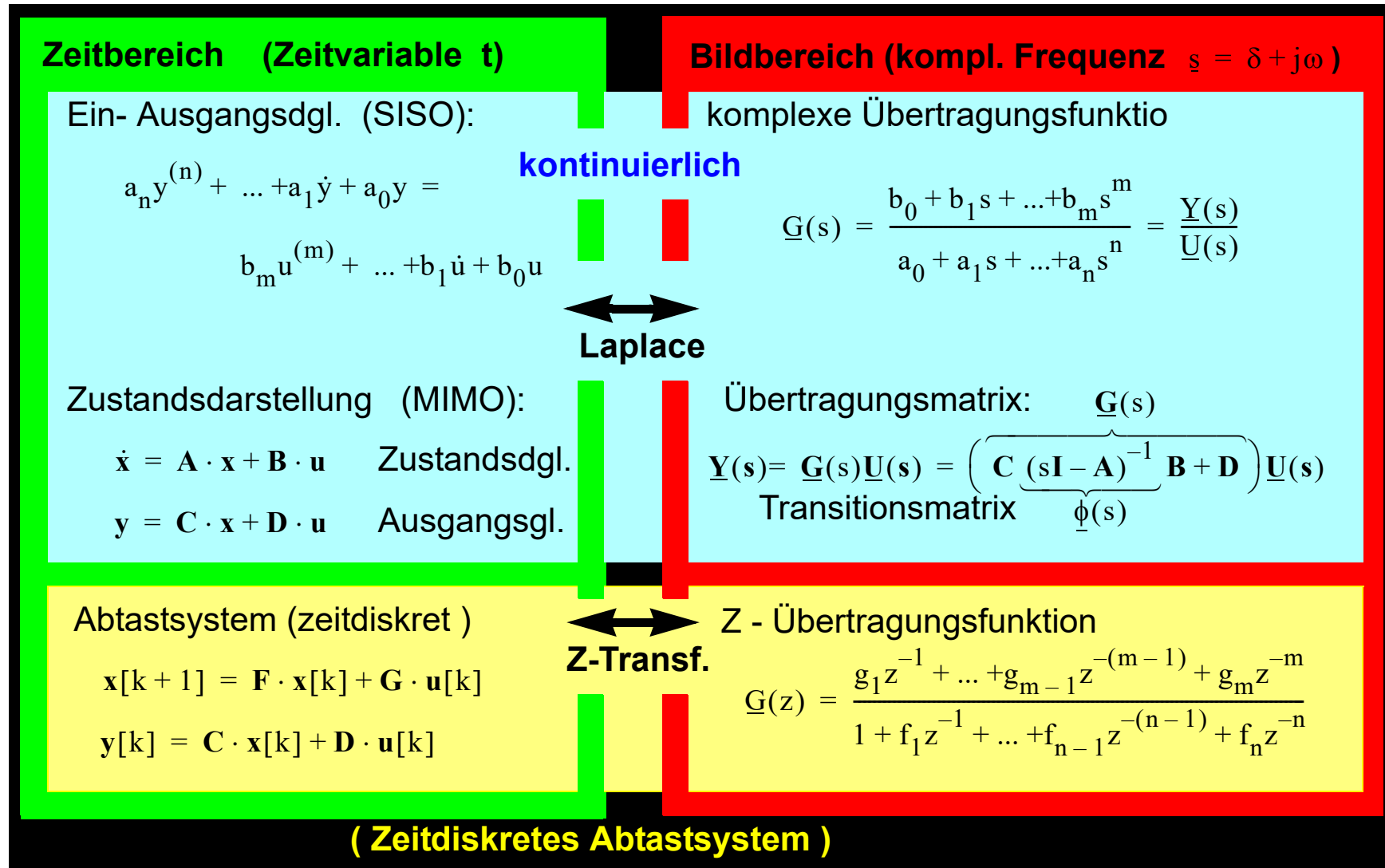
$$\underline{G}(s) = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$$

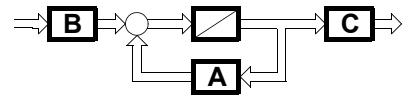
$$= \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot \dots \cdot (s - s_n)}$$

$$m \leq n$$



### 2.3 Modellübersicht





## 3 Analyse im Zustandsraum

### 3.1 Einführung wichtiger Grundbegriffe

#### 3.1.1 Eigenwerte

**Eigenwerte**  $\lambda_i$  sind Systemparameter (nur abhängig von Systemmatrix), die die Eigendynamik des Systems charakterisieren (==> homogene Lösungen).  
Ausgehend von der linearen Transformation

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \quad \text{ergibt sich} \quad \Rightarrow \quad (\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(d.h. Systemmatrix **A** bildet Zustandsraumkoordinatensystem mittels  $\lambda$  auf sich selbst ab)

Lösung für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  existiert nur wenn **charakteristische Gleichung**

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad \text{bzw. ausführlich}$$

$$\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0.$$

Lösung liefert n Eigenwerte  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

Theorem von Cayley Hamilton:

Jede quadratische (n x n)-Matrix **A** erfüllt ihre eigene charakteristische Gleichung.

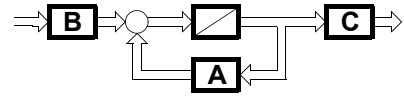
#### 3.1.2 Eigenvektoren

Zu jedem System mit n Eigenwerten  $\lambda_i$  gibt es n **Eigenvektoren**  $\mathbf{v}_i$ . Sie erfüllen die Gleichung

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i$$

Wichtige Eigenschaft:

Bei einfachen Eigenwerten sind die Eigenvektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  linear unabhängig.



### 3.1.3 Steuerbarkeit

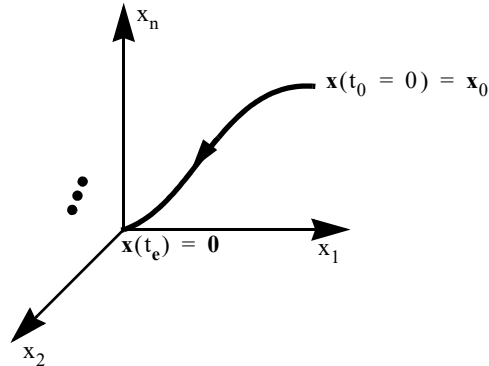
Definition:

Ein System heißt vollständig **steuerbar**, wenn der Zustandspunkt  $\mathbf{x}(t)$  durch die geeignete Wahl der Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  aus einem beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}_0$  in endlicher Zeit  $t_e$  nach  $\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{0}$  überführt werden kann.

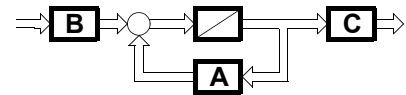
Steuerbarkeitsbedingung: **Steuerbarkeitsmatrix**

$$\mathbf{Q}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

muß Höchststrang  $n$  besitzen.







### 3.1.4 Beobachtbarkeit

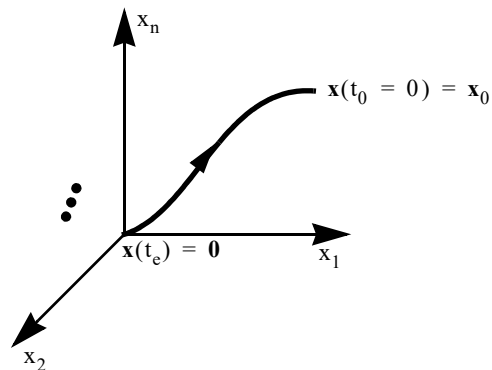
Definition:

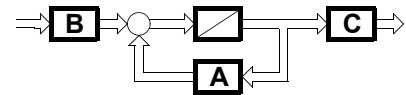
Ein System heißt vollständig **beobachtbar**, wenn durch Messung der Ausgangsgröße  $y(t)$  über eine endliche Zeit  $t_e$  der Anfangszustand  $x(t = 0)$  bei gegebener Eingangsgröße  $u(t)$  eindeutig bestimmt werden kann.

Beobachtbarkeitsbedingung: **Beobachtbarkeitsmatrix**

$$Q_B = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \dots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

muß Höchststrang  $n$  besitzen.





## 3.2 Strukturanalyse, Transformationen

Durch gezielte Wahl des Zustandskoordinatensystems wird formale Struktur beeinflusst, ohne die dynamischen Eigenschaften des Systems zu verändern.

**Ziel:** günstige formale Modellvoraussetzungen für Analyse- und Syntheseschritte schaffen

(z.B.: Prüfung der Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit; Regler-, Filter- und Beobachterentwurf)

Allgemeine lineare Transformation

$$\mathbf{x}_T(t) = \underbrace{\mathbf{T}}_{\text{Transformationsmatrix}} \cdot \mathbf{x}(t) \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x}_T(t)$$

Voraussetzung für Existenz:

$$\det(\mathbf{T}) \neq 0$$

Zustandsgleichungen des transformierten Systems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_T &= \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x}_T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{A}_T \cdot \mathbf{x}_T + \mathbf{B}_T \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

$\mathbf{A}_T = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1}$
$\mathbf{B}_T = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$
$\mathbf{C}_T = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^{-1}$
$\mathbf{D}_T = \mathbf{D}$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x}_T + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{C}_T \cdot \mathbf{x}_T + \mathbf{D}_T \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

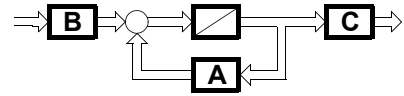
Eigenschaften

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad \text{entspricht} \quad \det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_T) = 0$$

Invarianz der Eigenwerte ist bei linearen Transformationen immer gesichert!

wichtige Normalformen:

**Jordan-Normalform** (Modalkoordinaten)  
**Regelungsnormalform**  
**Beobachtungsnormalform**



### 3.2.1 Jordan-Normalform

(Entkopplungsnormalform:  $\implies$  Modalkoordinaten)

Transformation  $\mathbf{x}_J = \mathbf{T}_J \cdot \mathbf{x}$

Transformationsvorschrift:  $\mathbf{T}_J = \mathbf{V}^{-1} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]^{-1}$

$\mathbf{v}_i$  sind die  $n$  Eigenvektoren. Es ergibt sich das Zustandsraum-Modell in Jordan-Normalform (Modalkoordinaten: Zustandsdgl'n sind entkoppelt)

-->

$$\dot{\mathbf{x}}_J = \mathbf{T}_J \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_J^{-1} \cdot \mathbf{x}_J + \mathbf{T}_J \cdot \mathbf{b} \cdot u$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_J + \begin{bmatrix} b_{J,1} \\ b_{J,2} \\ \dots \\ b_{J,n} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{T}_J^{-1} \cdot \mathbf{x}_J + d \cdot u$$

$$= [c_{J,1} \ c_{J,2} \ \dots \ c_{J,n}] \cdot \mathbf{x}_J + d \cdot u$$

Existenz nur gesichert, wenn Eigenvektoren linear unabhängig !  $\implies$  Nur möglich, wenn die  $n$  Eigenwerte  $\lambda_i$  verschieden sind.

$$\implies \det(\mathbf{T}_J) \neq 0$$

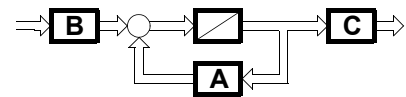
### Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitskriterien (Gilbert, Hautus)

#### Steuerbarkeit:

Ein System ist dann vollständig steuerbar, wenn kein Element  $b_{J,i}$  verschwindet.  
(Jede Zustandskoordinate wird von  $u$  angesteuert)

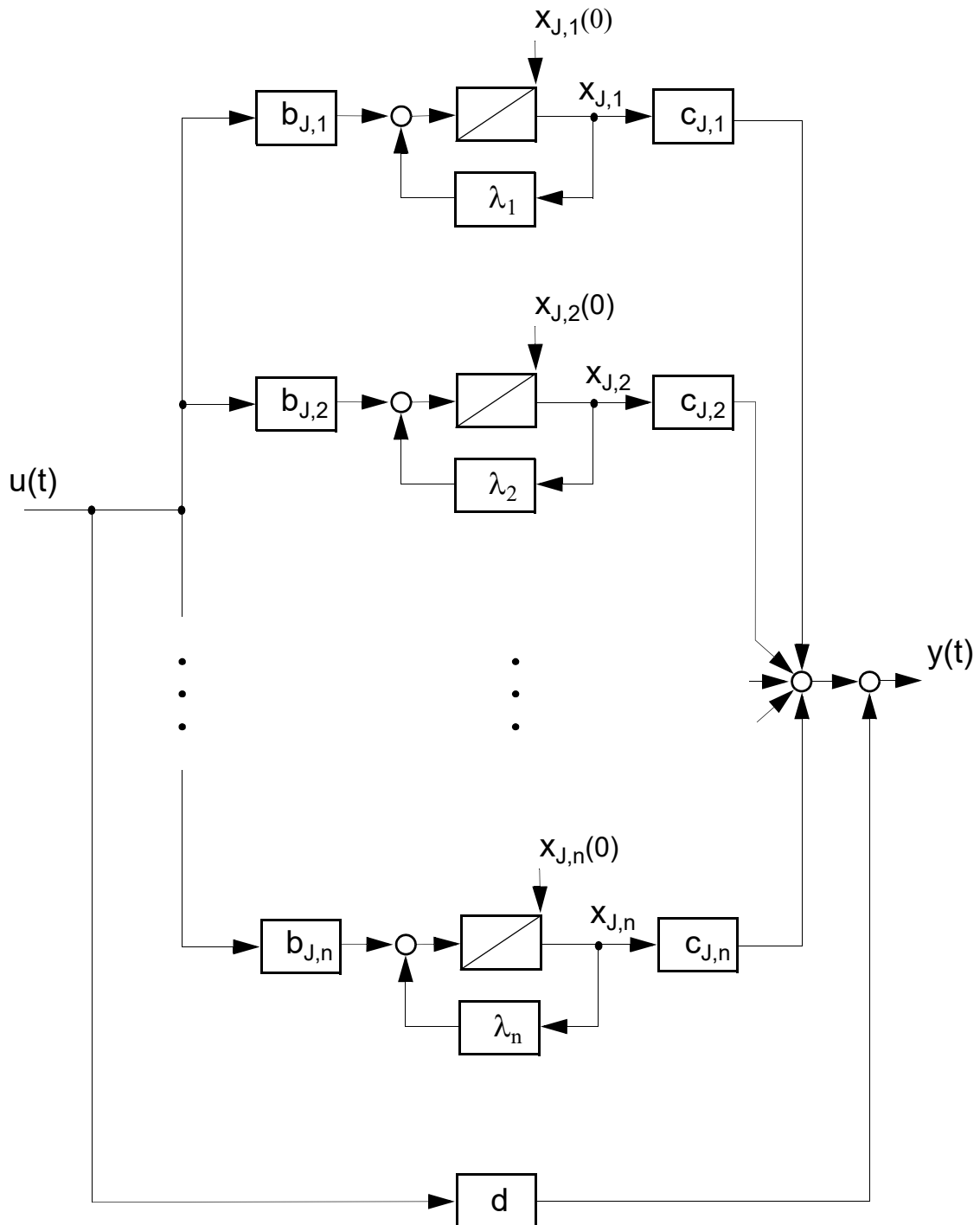
#### Beobachtbarkeit:

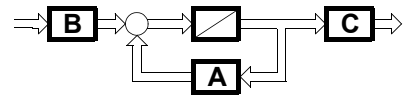
Ein System ist dann vollständig beobachtbar, wenn kein Element  $c_{J,i}$  verschwindet.  
(Jede Zustandskoordinate aus  $y$  bestimmbar)



## Strukturbild

### Jordan Normalform (Modalkoordinaten)





### 3.2.2 Regelungsnormalform

Transformation

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{x}$$

Transformationsvorschrift:

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_1^T \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_1^T \cdot \mathbf{A}^2 \\ \dots \\ \mathbf{t}_1^T \cdot \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } \mathbf{t}_1^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \cdot \mathbf{Q}_S^{-1}$$

$\mathbf{t}_1^T$  entspricht der letzten Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_S^{-1}$

Es ergibt sich das Zustandsraum-Modell in **Regelungsnormalform**

$$\rightarrow \dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_R^{-1} \cdot \mathbf{x}_R + \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{b} \cdot u$$

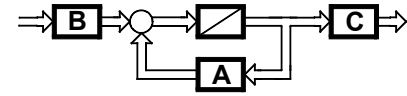
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_R + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{T}_R^{-1} \cdot \mathbf{x}_R + d \cdot u$$

$$= [b_0 - b_n \cdot a_0 \quad b_1 - b_n \cdot a_1 \quad \dots \quad b_{n-1} - b_n \cdot a_{n-1}] \cdot \mathbf{x}_R + b_n \cdot u$$

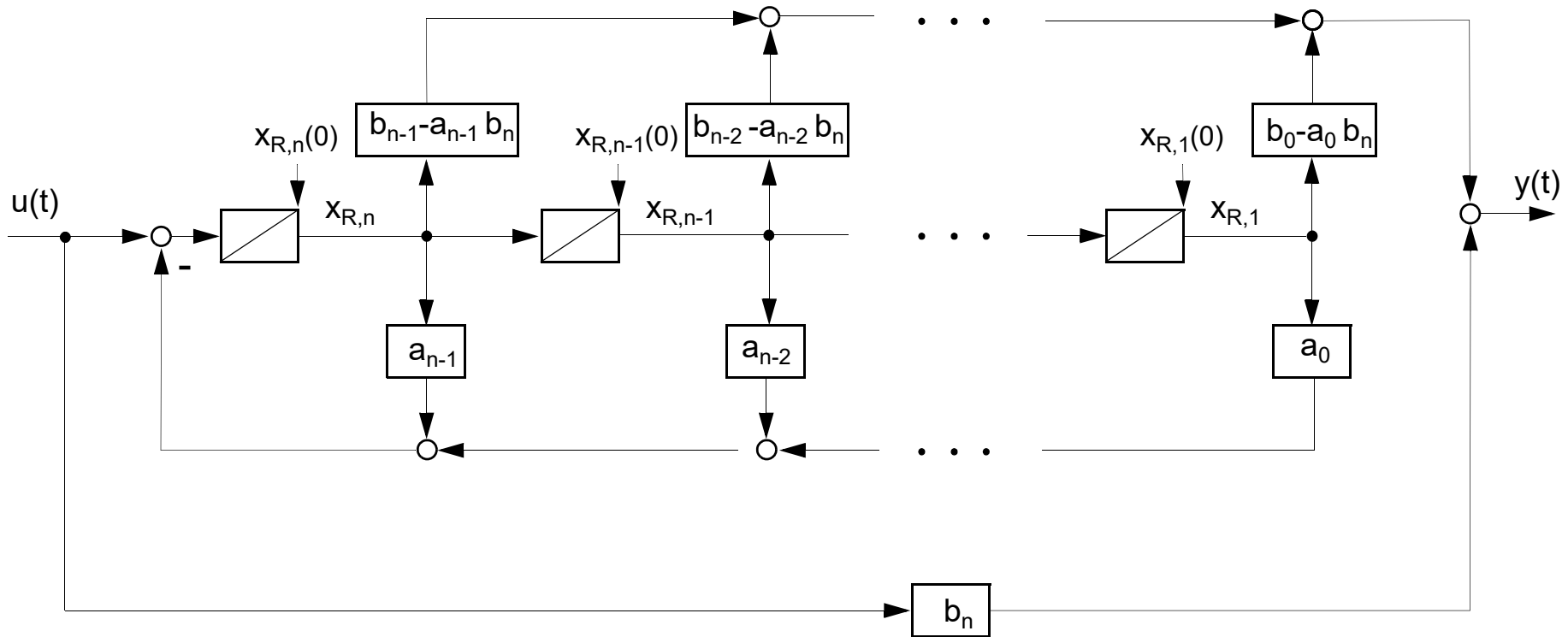
$a_i$  sind die Nennerkoeffizienten der Übertragungsfunktion  $G(s)$

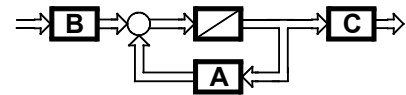
$b_i$  sind die Zählerkoeffizienten der Übertragungsfunktion  $G(s)$



**Strukturbild**

**Regelungsnormalform**





### 3.2.3 Beobachtungsnormalform

Transformation

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{T}_B \cdot \mathbf{x}$$

Transformationsvorschrift:

$$\mathbf{T}_B^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_1 & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{t}_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } \mathbf{t}_1 = \mathbf{Q}_B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{t}_1$  entspricht der letzten Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_B^{-1}$

Es ergibt sich das Zustandsraum-Modell in **Beobachtungsnormalform**

$$\dot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{T}_B \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_B^{-1} \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{T}_B \cdot \mathbf{b} \cdot u$$

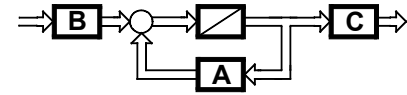
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_B + \begin{bmatrix} b_0 - b_n \cdot a_0 \\ b_1 - b_n \cdot a_1 \\ b_2 - b_n \cdot a_2 \\ \dots \\ b_{n-1} - b_n \cdot a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{T}_B^{-1} \cdot \mathbf{x}_B + d \cdot u$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_B + b_n \cdot u$$

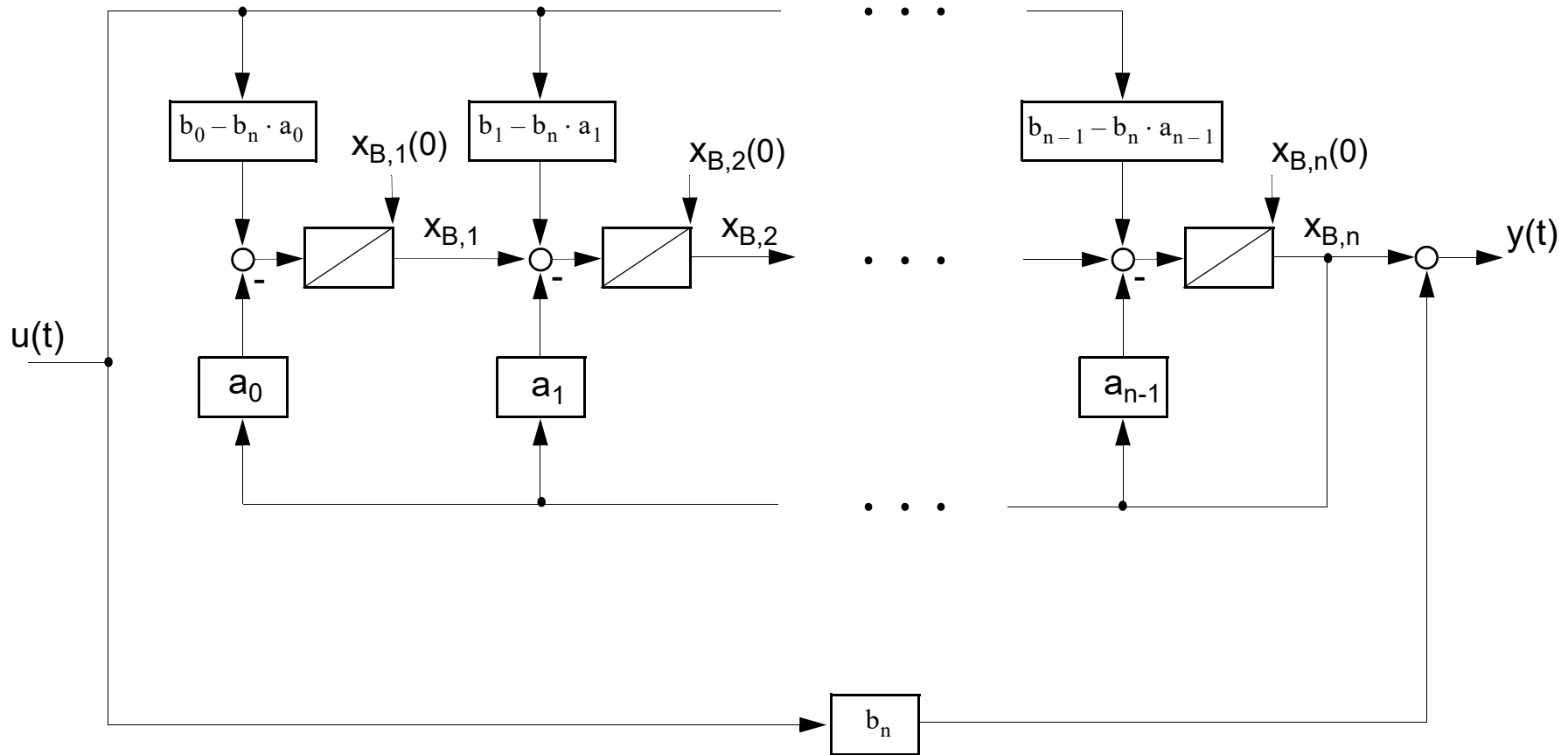
$a_i$  sind die Nennerkoeffizienten der Übertragungsfunktion  $G(s)$

$b_i$  sind die Zählerkoeffizienten der Übertragungsfunktion  $G(s)$

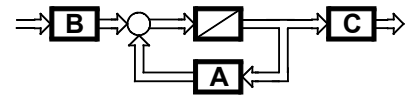


## Strukturbild

## Beobachtungsnormalform







### 3.3 Lösung der Zustandsgleichung

Allgemeines System n-ter Ordnung

System-Differentialgleichung:      Lösung im Bildbereich:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \qquad \underline{\mathbf{X}}(s) = (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{x}_0 + (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{U}}(s)$$

$$\qquad \qquad \qquad = \underline{\Phi}(s) \cdot \mathbf{x}_0 + \underline{\Phi}(s) \cdot \mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{U}}(s)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$$

Anfangsbedingungen

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

#### Rücktransformation

**Lösung im Zeitbereich:**



$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H + \mathbf{x}_I$$

$$= \mathbf{L}^{-1} \{ \underline{\Phi}(s) \} \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{L}^{-1} \{ \underline{\Phi}(s) \} \cdot \mathbf{B} * \mathbf{L}^{-1} \{ \underline{\mathbf{U}}(s) \}$$

$\mathbf{x}_H$ : Homogene Lösung

$\mathbf{x}_I$ : Inhomogene Lösung (Partikuläre Lösung)

\* : FALTUNGSPRODUKT

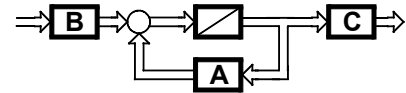
Mit der  $(n \times n)$ -**Transitionsmatrix** (Fundamentalmatrix)

$$\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A} \cdot (t-t_0)} = \mathbf{L}^{-1} \{ \underline{\Phi}(s) \} = \mathbf{L}^{-1} \{ (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot (t-t_0)} \cdot \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t (e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau)) d\tau$$

bzw. für den Ausgang

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot e^{\mathbf{A} \cdot (t-t_0)} \cdot \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t (\mathbf{C} \cdot e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau)) d\tau + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t)$$



Mit der Reihenentwicklung

$$e^{a \cdot (t-t_0)} = 1 + a \cdot \frac{t}{1!} + a^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots$$

kann die Transitionsmatrix  $\Phi(t, t_0)$  elementweise als konvergente Potenzreihe

$$e^{A \cdot (t-t_0)} = \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \frac{t}{1!} + \mathbf{A}^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots$$

entwickelt werden.

--> Näherungsweise Berechnung mit Digitalrechner leicht möglich.

Andere Darstellung der homogenen Lösung

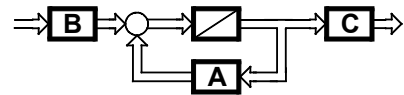
$$\mathbf{x}_H(t) = k_1 \cdot \mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \dots + k_n \cdot \mathbf{v}_n \cdot e^{\lambda_n \cdot t} = \sum_{i=1}^n (k_i \cdot \mathbf{v}_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t})$$

mit

den Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  und den Parameter  $k_i = \mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{x}_0$

aus den Linkseigenvektoren  $\mathbf{w}_i$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{w}_n^T \end{bmatrix} = \mathbf{V}^{-1} \text{ inverse Matrix der Eigenvektoren}$$



## 3.4 Stabilität

Def.: Die Ruhelage  $x_R$  eines Systems heißt stabil, wenn der Zustandspunkt  $x(t)$  für alle

Zeiten  $0 \leq t \leq \infty$  in einer beliebig engen Umgebung der Ruhelage  $x_R$  bleibt.

Ruhelage:

$$\mathbf{0} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_R + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_R$$

$$\rightarrow \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_R = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_R$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_R)$$

Übergang zu den Abweichungen

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} \quad \text{Homogene Dgl. der Störung}$$

Ergebnis:

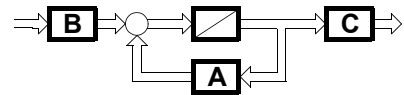
**Stabilität** ist reine Systemeigenschaft (nur von  $\mathbf{A}$  abhängig)

Stabilitätsanalyse nur an homogener Differentialgleichung: **Eigenwertanalyse**

Stabilitätskriterium (**Ljapunov**)

Liegen sämtliche Eigenwerte eines Systems (Pole der Übertragungsfunktion) links der imaginären  $j$ -Achse (nur negative Realteile sind vorhanden), so ist das System **stabil** !

( $\rightarrow$  Sämtliche homogenen Lösungen verschwinden für  $t \rightarrow \infty$ )



## 4 Synthese im Zustandsraum

Syntheseproblem

Forderungen:

- Führungs- und Störverhalten (stationär genau:  $y = w$ )
- Stabilität

### 4.1 Zustandsrückführung über Zustandsregler

Eingangsgröße

Allgemein:

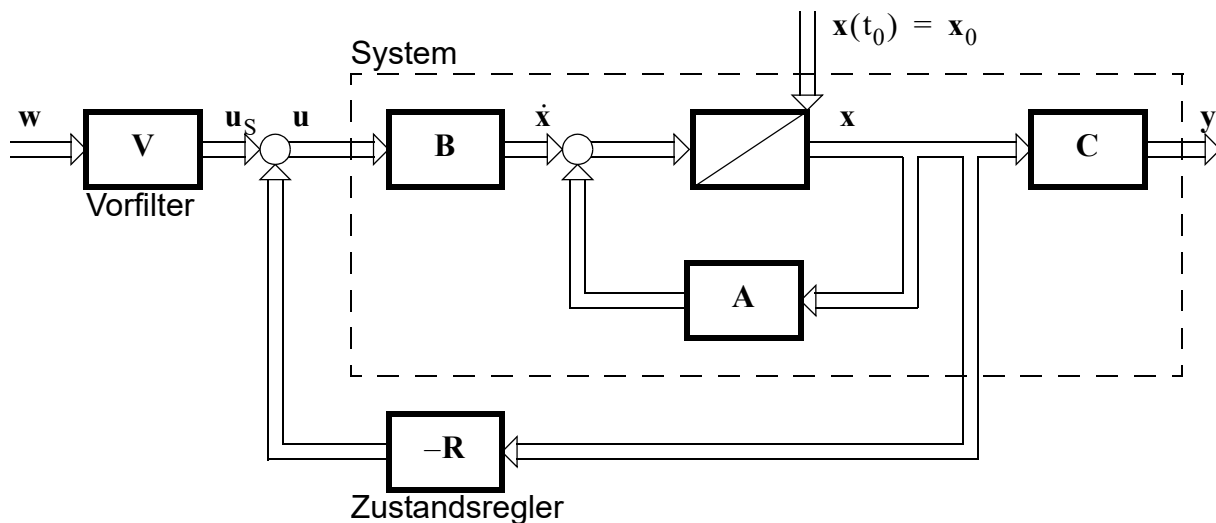
$$u = -R \cdot x(t) + u_S$$

Spezialfall: ( $p = 1$ )

$$u = -r^T \cdot x(t) + u_S$$

**R**: Reglermatrix ( $p \times n$ )

Strukturbild

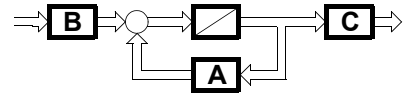


### Geschlossenes System

$$\dot{x} = (A - B \cdot R) \cdot x + B \cdot V \cdot w = A_g \cdot x + B_g \cdot w$$

$$y = (C - D \cdot R) \cdot x + D \cdot V \cdot w = C_g \cdot x + D_g \cdot w$$

Frage: Wie wird die **Reglermatrix R** und die **Vorfiltermatrix V** bestimmt ?



Bestimmung der **Vorfiltermatrix V**

Endwertsatz der L-Transformation

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{w}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \underline{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{w}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \underline{\mathbf{G}}(s) \cdot \underline{\mathbf{U}}_S(s) = \mathbf{w}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \underline{\mathbf{G}}(s) \cdot \underbrace{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \underline{\mathbf{U}}_S(s)}_{\mathbf{u}_S(t \rightarrow \infty)} = \mathbf{w}$$

$$\text{-->} \quad \underline{\mathbf{G}}(s=0) \cdot \mathbf{u}_S(\infty) = \mathbf{w}$$

Bedingung:  $\mathbf{u}_S(\infty) = \mathbf{G}^{-1}(0) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{w}$

mit **Vorfiltermatrix**:  $\mathbf{V} = [(\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{R}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{R} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}]^{-1}$

Speziell für  $\mathbf{D} = \mathbf{0} : \text{==>} \quad \mathbf{V} = [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{R} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B}]^{-1}$

==> 1. Forderung

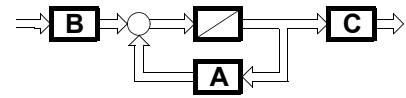
$\mathbf{y} = \mathbf{w}$      **Stationäre Genauigkeit** erfüllt!

==> 2. Forderung

Bestimmung der **Reglermatrix R** so, daß die Eigenwerte der Systemmatrix  $\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}$  bzw. die Pole der Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}_W(s)$  des geschlossenen Systems und damit die Dynamik des geregelten Systems gezielt beeinflußt werden.

--> verschiedene Reglerentwurfverfahren

**Wichtig:** Stabilität muß garantiert sein (Lage der Pole bzw. Eigenwerte)



### 4.1.1 Polvorgabe-Regler

Ausgehend von der Regelungsnormalform (Eingrößen-System  $p = 1, q = 1$ )

$$\dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{A}_R \cdot \mathbf{x}_R + \mathbf{b}_R \cdot u \quad \text{mit} \quad u = \mathbf{r}_R^T \cdot \mathbf{x}_R$$

--> Systemmatrix des geschlossenen Systems

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{R1} & r_{R2} & \dots & r_{Rn} \end{bmatrix}$$

charakteristisches Polynom

$$\text{--> } s^n + (a_{n-1} + r_{Rn}) \cdot s^{n-1} + \dots + (a_1 + r_{R2}) \cdot s + (a_0 + r_{R1})$$

aus Polvorgabe: vorgeschriebenes Polynom

$$\text{--> } s^n + p_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + p_1 \cdot s + p_0$$

**Koeffizientenvergleich:**

$$\mathbf{r}_R^T = \begin{bmatrix} p_0 - a_0 & p_1 - a_1 & \dots & p_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Für allgemeines System gilt

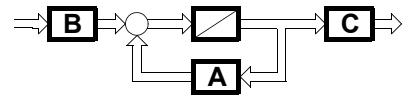
$$\mathbf{r}^T = \left[ (p_0 - a_0) \cdot \mathbf{t}_1^T + (p_1 - a_1) \cdot \mathbf{t}_1^T \cdot \mathbf{A} + \dots + (p_{n-1} - a_{n-1}) \cdot \mathbf{t}_1^T \cdot \mathbf{A}^{n-1} \right] \quad \text{bzw.}$$

$$\mathbf{r}^T = p_0 \cdot \mathbf{t}_1^T + p_1 \cdot \mathbf{t}_1^T \cdot \mathbf{A} + p_2 \cdot \mathbf{t}_1^T \cdot \mathbf{A}^2 + \dots + p_{n-1} \cdot \mathbf{t}_1^T \cdot \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{t}_1^T \cdot \mathbf{A}^n$$

mit  $\mathbf{t}_1^T$  als letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_S^{-1}$

**Praxis Diskussion: Wohin sollen Pole gelegt werden ?**

- instabile Pole (positiver Realteil) in negative Halbebene verschieben
- nur dominante Pole so weit nach links als nötig verschieben
- extreme Schnelligkeit (weite Linksverschiebung) -> Gefahr der Übersteuerung (Stellgliedbegrenzung bedeutet Nichtlinearität)
- Pollagen-Optimierung über Zeitsimulation vornehmen.  
(eventuell interaktive Kombination mit anderen Entwurfsverfahren  
z.B. Riccati-Entwurf)



## 4.1.2 Riccati-Regler

**Ziel:** Minimierung eines quadratischen Gütemaßes  $J$   
 (Minimierung der „Kostenfunktion“ eines geregelten Zustandsübergangs von  $x_0(t_0)$  nach  $x_1(t_1)$  entlang der Trajektorie im Zeitintervall  $[t_0, t_1]$ )

Gütemaße:

$$J_x = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (q_{11} \cdot x_1^2(t) + \dots + q_{nn} \cdot x_n^2(t)) dt$$

$$J_u = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (s_{11} \cdot u_1^2(t) + \dots + s_{pp} \cdot u_p^2(t)) dt$$

$$J = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} (x^T(t) \cdot Q \cdot x(t) + u^T(t) \cdot S \cdot u(t)) dt$$

mit  $Q = \text{diag}(q_{11}, \dots, q_{nn})$  und  $S = \text{diag}(s_{11}, \dots, s_{pp})$

Minimierung von  $J(\mathbf{R})$  über die Bedingung:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{0}$$

führt zu einer  $(n \times n)$ -Parametermatrix  $\mathbf{P}$  die durch Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

bestimmt werden muß.

$$\Rightarrow \text{Reglermatrix } \mathbf{R} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{P}$$

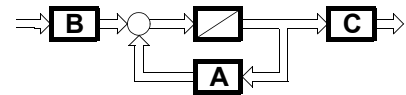
### Praxis

Diskussion: Wie Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{S}$  wählen?

- Besetzung nur auf Hauptdiagonalen (Nebenelemente alle Null)
- Nur die relative Gewichtung hat Einfluß
- Optimierung des Übergangsverhaltens durch Variation der Gewichtungsfaktoren

(eventuell Kombination mit Polvorgabe)

Stellgliedbegrenzung beachten (Nichtlinearitäten)



### 4.1.3 Deadbeat-Regler

Entwurf und Realisierung nur am Abtastsystem möglich

**Ziel:** Steuerfolge  $u[1], \dots, u[k]$  so wählen, daß Führungsgröße in minimaler Einstellzeit

$$t_e = n \cdot T \text{ erreicht.}$$

Diskrete Regelungsnormalform

$$\rightarrow \mathbf{x}_R[k+1] = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{x}_R[k] + \mathbf{g}_R \cdot u[k]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -f_0 & -f_1 & -f_2 & \dots & -f_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_R[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u[k]$$

$$\rightarrow \mathbf{x}_{R1}[k+1] = \mathbf{x}_{R2}[k]$$

$$\mathbf{x}_{R2}[k+1] = \mathbf{x}_{R3}[k]$$

...

$$\mathbf{x}_{Rn-1}[k+1] = \mathbf{x}_{Rn}[k]$$

$$\mathbf{x}_{Rn}[k+1] = -f_0 \cdot \mathbf{x}_{R1}[k] - \dots - f_{n-1} \cdot \mathbf{x}_{Rn}[k] + u[k]$$

aus der letzten Zeile folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{Rn}[k+1] = 0 \quad \text{für} \quad u[k] &= f_0 \cdot \mathbf{x}_{R1}[k] + \dots + f_{n-1} \cdot \mathbf{x}_{Rn}[k] + u[k] \\ &= \begin{bmatrix} f_0 & \dots & f_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_R[k] \\ &= -\mathbf{r}_R^T \cdot \mathbf{x}_R[k] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_R = \begin{bmatrix} -f_0 & \dots & -f_{n-1} \end{bmatrix}$$

Nach  $n$  Steuerschritten bzw. nach der Zeit  $n \cdot T$  ist

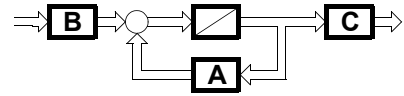
$$\mathbf{x}_R[k+n] = (\mathbf{F}_R - \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{r}_R^T)^n = 0$$

Charakteristische Gleichung:  $P(z) = z^n = 0 \rightarrow$  sämtliche Pole  $z_i = 0$

Anwendung auf allgemeines System:

Spezielle Polvorgabe des geschlossenen Abtastsystems  $P(z) = z^n = 0$





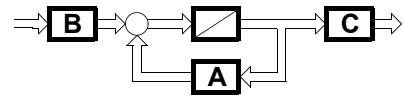
$$\implies \mathbf{r}^T = \mathbf{t}_1^T \cdot \mathbf{F}^n$$

mit  $\mathbf{t}_1^T$  als letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_S^{-1}$

## Praxis

Diskussion bzw. Prüfung der Anwendbarkeit

- Praktisch nur an asymptotisch stabilen Systemen anwendbar (Schwer bzw. praktisch nicht anwendbar bei oszillatorischen, schwach gedämpften oder instabilen Systemen)
- Meistens große Empfindlichkeit bei Modellungenauigkeiten
- Optimierung durch Variation der Abtastzeit (kürzere Abtastzeit  $\implies$  schnellerer Übergang  $\implies$  größere Stellenergie: Stellgliedbegrenzung beachten.)



## 4.2 Ausgangsrückführung über Zustandsbeobachter

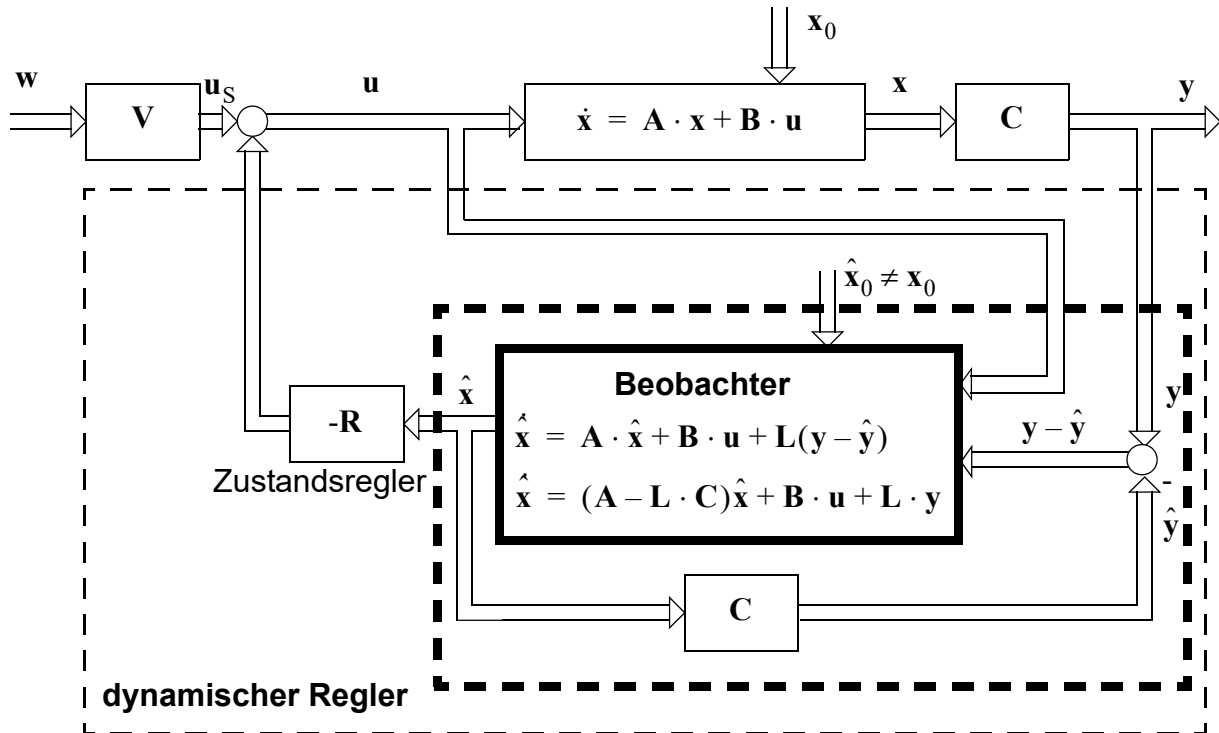
Problemstellung:

Bei vollständiger Zustandsrückführung müssen sämtliche Zustandsgrößen verfügbar sein, d.h. praktisch gemessen werden.

--> Häufig nicht oder nur mit hohem Aufwand möglich!

Abhilfe:

Ausgangsrückführung über **Beobachter** (Luenberger, Kalman)



**Beobachter:**  $\hat{\dot{x}} = (A - L \cdot C) \hat{x} + B \cdot u + L \cdot y$  ,  $\hat{y} = C \cdot \hat{x}$  ist

Streckenmodell mit Ausgangsfehlerückführung

--> **Schätzwerte**  $\hat{x}(t)$  des Zustandsvektors  $x(t)$

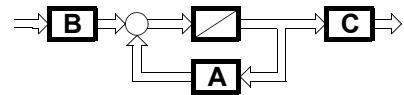
--> Zustandsregler

Ergebnis

==> **d y n a m i s c h e r R E G L E R**

Ausgangsrückführung über:

Zustandsbeobachter und Zustandsregler



Funktioniert nur, wenn Schätzfehlerdynamik schneller als die Eigendynamik des geschlossenen Systems.  $\implies \mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t)$

--> **Beobachterentwurf** muß dies garantieren

Gleichung des Beobachters

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r}^*$$

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

$$\implies \boxed{\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}) \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{A}_B \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_B \cdot \mathbf{u} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{y}} \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{C} \quad \text{Beobachtersystemmatrix,}$$

$$\mathbf{B}_B = \mathbf{B} \quad \text{Beobachtereingangsmatrix,}$$

$$\mathbf{L} \quad \text{Beobachtermatrix.}$$

Schätzfehlerdynamik

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{y})$$

$$= \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{C})}_{\text{Dynamikmatrix des Schätzfehlers}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}$$

Dynamikmatrix des Schätzfehlers

--> Eigenwerte z.B. durch Polvorgabe festlegen

Wohin Eigenwerte legen ?

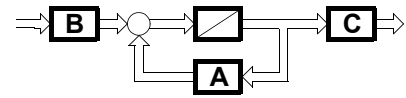
links von Systemeigenwerten: Schätzfehler schneller als Zustandsänderung

$$\implies \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} \quad \text{für} \quad t \rightarrow \infty$$

Ausgehend von der Beobachtungsnormform

$$\implies \dot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{T}_B \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_B^{-1} \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{T}_B \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_B + \begin{bmatrix} b_{B,1} \\ b_{B,2} \\ b_{B,3} \\ \dots \\ b_{B,n} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}_B = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{T}_B^{-1} \cdot \mathbf{x}_B + d \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_B + d \cdot \mathbf{u}$$



$$\rightarrow \mathbf{A}_B - \mathbf{l} \cdot \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 - l_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 - l_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 - l_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - l_n \end{bmatrix}$$

--> Charakteristisches Polynom des Beobachters

$$s^n + (a_{n-1} + l_n) \cdot s^{n-1} + \dots + (a_1 + l_2) \cdot s + (a_0 + l_1)$$

Koeffizientenvergleich mit gewünschtem Polynom

$$s^n + p_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + p_1 \cdot s + p_0$$

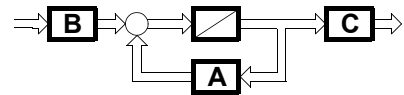
==> Beobachterrückführung

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} p_0 - a_0 \\ p_1 - a_1 \\ \dots \\ p_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Für allgemeines System gilt

$$\mathbf{l} = \left[ p_0 \cdot \mathbf{t}_1 + p_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_1 + \dots + p_{n-1} \cdot \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{t}_1 + \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{t}_1 \right]$$

mit  $\mathbf{t}_1$  als letzte Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_B^{-1}$



### 4.2.1 Analogie zwischen Regler- und Beobachterentwurf

Es können die gleichen Entwurfswerkzeuge (Polvorgabe, Riccati) sowohl für den Regler als auch den Beobachterentwurf verwendet werden. Folgende Größen entsprechen sich formal und können jeweils benutzt werden.

Reglerentwurf		Beobachterentwurf
---------------	--	-------------------

A	entspricht	$A^T$
---	------------	-------

B	entspricht	$B^T$
---	------------	-------

C	entspricht	$C^T$
---	------------	-------

#### Separationstheorem

homogenes Gesamtsystem geschlossen darstellbar

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \cdot C \\ L \cdot C & A - L \cdot C - B \cdot R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x \end{bmatrix}$$

Charakteristische Gleichung

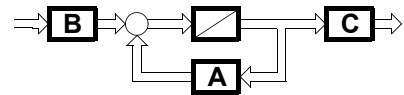
$$\begin{vmatrix} s \cdot I - A & B \cdot R \\ -L \cdot C & s \cdot I - (A - L \cdot C - B \cdot R) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} s \cdot I - A + B \cdot R & B \cdot R \\ s \cdot I - A + B \cdot R & s \cdot I - A + L \cdot C + B \cdot R \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} s \cdot I - A + B \cdot R & B \cdot R \\ 0 & s \cdot I - A + L \cdot C \end{vmatrix} = 0$$

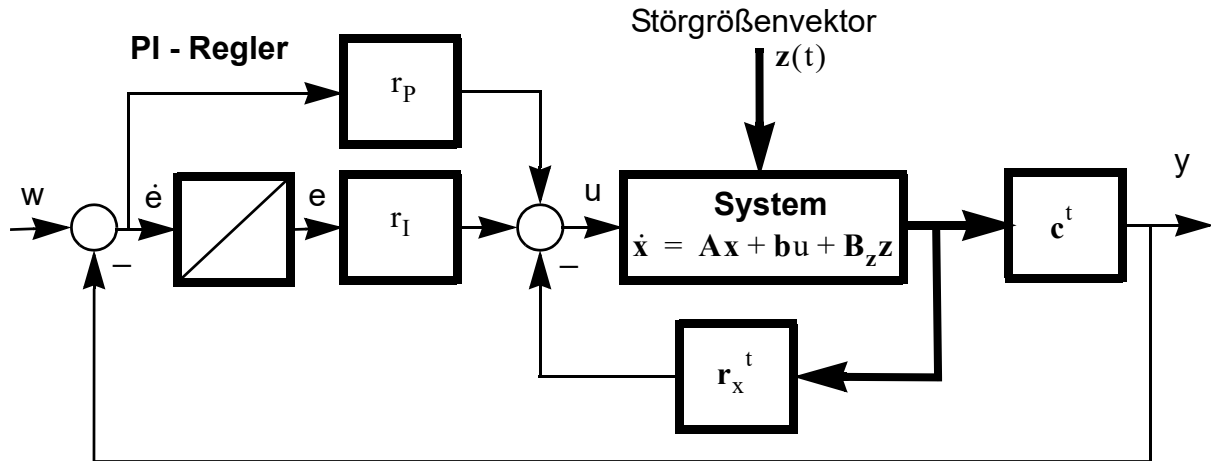
$$|s \cdot I - A + B \cdot R| \cdot |s \cdot I - A + L \cdot C| = 0$$

==> Die Eigenwerte des ohne Beobachter geschlossenen Systems werden durch den Beobachter nicht verschoben. Es kommen zusätzlich die Eigenwerte des Beobachters hinzu.



### 4.3 PI-Zustandsregelung

Systeme (n-ter) - Ordnung mit Störungen und Modellungenauigkeiten



**Problem** : Störgrößen führen im allgemeinen zu stationären Regelabweichungen der Ausgangsgröße bei reiner Zustandsregelung nach Kap. 4.1

==> Abhilfe: **PI - Zustandsregelung** (gemäß Strukturbild)

**Reglerentwurf:**

Erweiterung des Zustandsvektors um zusätzliche Zustandsgröße e des PI - Reglers  
--> zusätzlich Zustandsdifferentialgleichung  $\dot{e} = w - y = w - \mathbf{c}^t \cdot \mathbf{x}$

Es ergibt sich die erweiterte Zustandsdgl.:

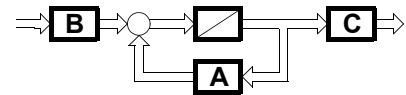
$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{c}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

Zustandsregelung für erweitertes System mit:

$$u = -\mathbf{r}^t \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ e \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}^t & -r_I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ e \end{bmatrix}$$

Reglervektor  $\mathbf{r}^t$  wird z.B. durch Vorgabe von (n+1) - Eigenwerte mit char. Polynom

$$\left| \lambda \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{c}^t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r}^t \right| = P(\lambda)$$



für geschlossenes System bestimmt. Dynamik des erweiterten Systems mit PI - Regler ist damit definiert festgelegt. Aus  $\mathbf{r}^t$  sind nun zu bestimmen  $r_p, r_I, \mathbf{r}_x^t$ :

$$\begin{aligned} \text{Aus } \mathbf{u} &= -\mathbf{r}_x^t \cdot \mathbf{x} + r_p \cdot \dot{\mathbf{e}} + r_I \cdot \mathbf{e} & \text{mit } \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{w} - \mathbf{y} = \mathbf{w} - \mathbf{c}^t \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{c}^t \cdot \mathbf{x} \\ &= -(\mathbf{r}_x^t + r_p \cdot \mathbf{c}^t) \cdot \mathbf{x} + r_I \cdot \mathbf{e} & & \text{für } \mathbf{w} = 0 \\ &= -\left[ \underbrace{\mathbf{r}_x^t + r_p \cdot \mathbf{c}^t}_{\hat{\mathbf{r}}^t}, \quad -r_I \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \\ & & \hat{\mathbf{r}}^t &= [r_1, r_2, \dots, r_n] \\ &= -[\hat{\mathbf{r}}^t, -r_I] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = -\mathbf{r}^t \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{r}}^t = \mathbf{r}_x^t + r_p \cdot \mathbf{c}^t \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}_x^t = \hat{\mathbf{r}}^t - r_p \cdot \mathbf{c}^t$$

Aus Bedingung für stationären Zustand ergibt sich im Frequenzbereich

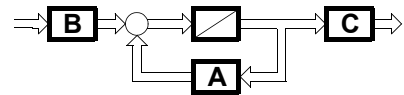
$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Y}}(s) &= r_p \cdot \underbrace{\underline{\mathbf{G}}(s)}_{\text{Streckenübertragungsfunktion}} \cdot \underline{\mathbf{W}}(s) = r_p \cdot \mathbf{c}^t \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot \underline{\mathbf{W}}(s) \\ &\Downarrow \text{Grenzwertsatz der Laplace - Transformation} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \underbrace{r_p \cdot \mathbf{c}^t \cdot (-\mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{b}}_{= 1} \cdot w(\infty) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$r_p = -(\mathbf{c}^t \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b})^{-1}$$

$$\mathbf{r}_x^t = \hat{\mathbf{r}}^t + (\mathbf{c}^t \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b})^{-1} \cdot \mathbf{c}^t = [r_1, r_2, \dots, r_n] + (\mathbf{c}^t \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b})^{-1} \cdot \mathbf{c}^t$$

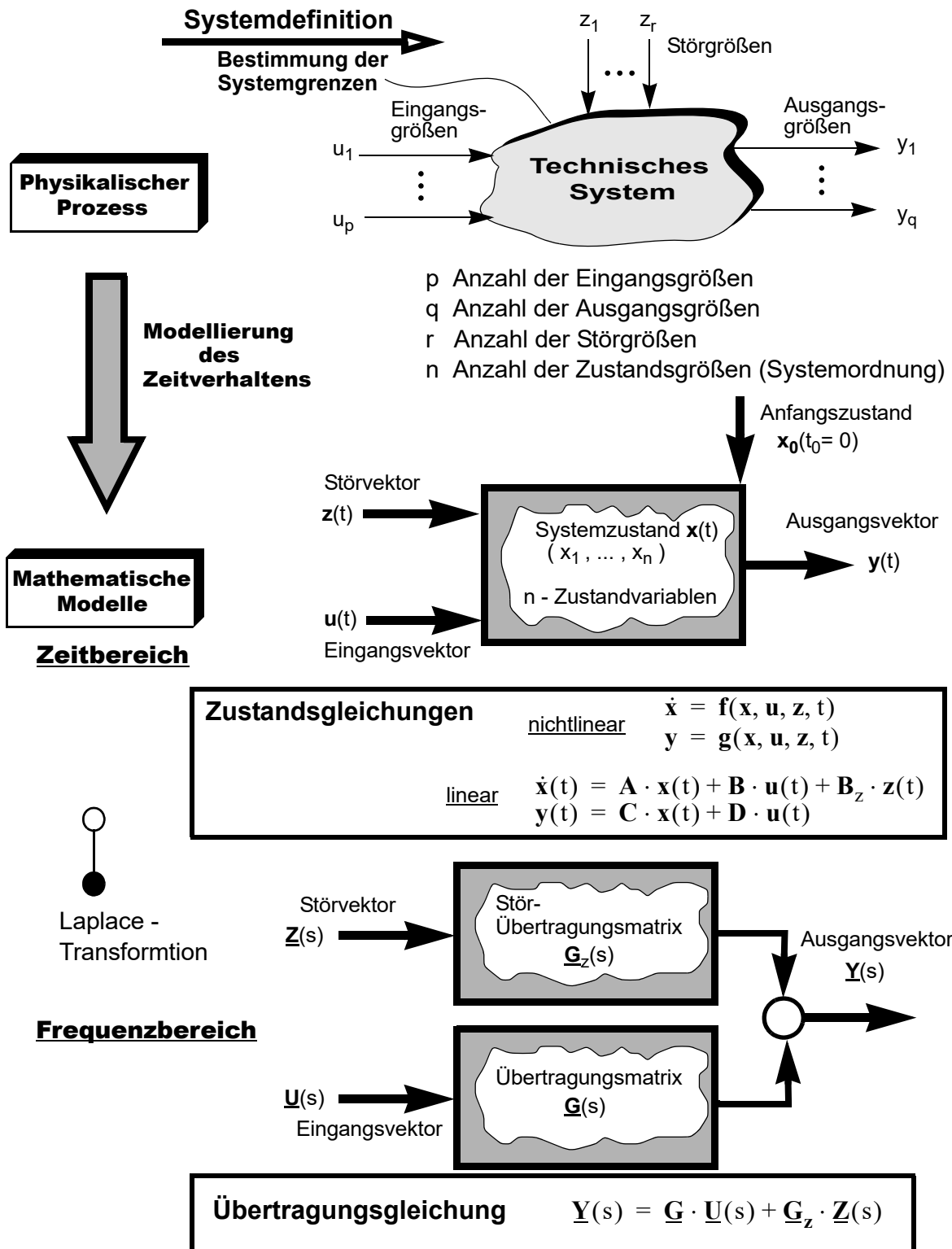
$$r_I = -\mathbf{r}^t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\underbrace{\mathbf{r}^t(n+1)}_{(n+1)\text{-tes Element von } \mathbf{r}^t} = -r_{n+1}$$



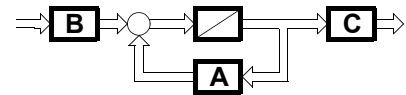
## 4.4 Entkopplungsregelung dynamischer Mehrgrößensysteme

Ausgangspunkt: Dynamisches Mehrgrößensystem ==> Mathematische Modelle

### Modellbildung eines Technischen Prozesses







#### 4.4.1 Lineare Ausgangsentkopplungsregelung im Zustandsraum (Zeitbereich)

Annahme: keine Störgrößen vorhanden

Aus Zustandsraummodell:  $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

Wahl der Stellgröße:

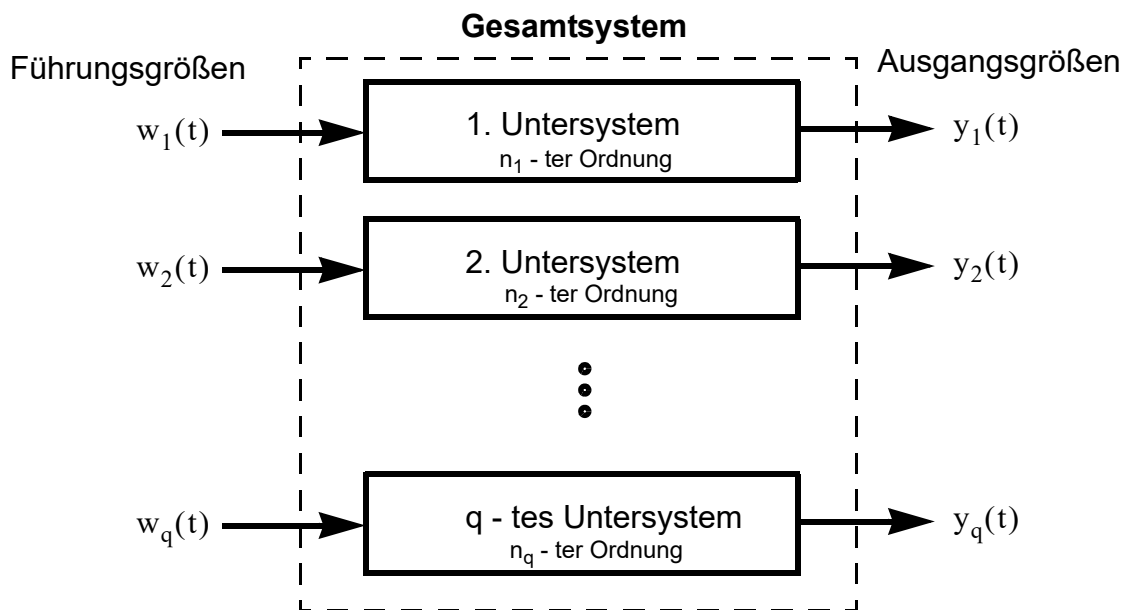
$$u(t) = \underbrace{-R}_{\text{Reglermatrix}} \cdot x(t) + \underbrace{V}_{\text{Vorfiltermatrix}} \cdot w(t)$$

Mit  $R$  Reglermatrix und  $V$  Vorfiltermatrix  $\implies$  Gleichung des geregelten Systems:

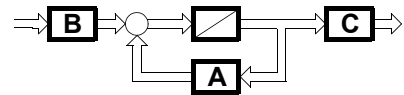
$$\dot{x}(t) = (A - B \cdot R) \cdot x(t) + B \cdot V \cdot w(t)$$

$$y(t) = (C - D \cdot R) \cdot x(t) + D \cdot V \cdot w(t)$$

**Ziel** der Regelung: Wahl von  $R$  und  $V$  so, dass die einzelnen Ausgänge  $y_i(t)$ ,  $i = 1 \dots q$  entkoppelt sind und sich jeweils nur über die entsprechende Führungsgröße  $w_i(t)$  beeinflussen lassen. Es entsteht dann das folgende **entkoppelte** Gesamtsystem



Bestimmung von  $R$  und  $V$  erfolgt schrittweise.



### 1. Schritt: Entkopplung der Ausgänge durch Zustandsvektorrückführung

Existiert mit  $\mathbf{d}_i^t = \mathbf{0}^t$  kein Direktdurchgriff der Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  auf die einzelnen Ausgänge  $y_i(t)$  wird jeder Ausgang gemäß

$$\underbrace{y_i^{(\delta_i)}(t)}_{y_i^*(t)} = \underbrace{\mathbf{c}_i^t \mathbf{A}^{(\delta_i)}}_{\mathbf{c}_i^{*t}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\mathbf{c}_i^t \mathbf{A}^{(\delta_i-1)} \mathbf{B}}_{\mathbf{d}_i^{*t}} \mathbf{u}(t)$$

solange differenziert ( $\delta_i$ -mal) bis  $\mathbf{d}_i^{*t} \neq \mathbf{0}$  wird. Mit der Differenzordnung  $\delta_i$  ist damit bekannt auf welche Ableitung des jeweiligen Ausgangs  $y_i(t)$  die Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  direkt einwirkt. Es läßt sich nun ein neues Ausgangssystem

$$\mathbf{y}^*(t) = \begin{bmatrix} y_1^{(\delta_1)}(t) \\ y_2^{(\delta_2)}(t) \\ \vdots \\ y_q^{(\delta_q)}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^t \mathbf{A}^{(\delta_1)} \\ \mathbf{c}_2^t \mathbf{A}^{(\delta_2)} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_q^t \mathbf{A}^{(\delta_q)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^*} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^t \mathbf{A}^{(\delta_1-1)} \mathbf{B} \\ \mathbf{c}_2^t \mathbf{A}^{(\delta_2-1)} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_q^t \mathbf{A}^{(\delta_q-1)} \mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^*} \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^{*t} \\ \mathbf{c}_2^{*t} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_q^{*t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{*t} \\ \mathbf{d}_2^{*t} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_q^{*t} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{C}^* \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}^* \mathbf{u}(t)$$

definieren mit der neuen Durchgriffsmatrix

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{*t} \\ \mathbf{d}_2^{*t} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_q^{*t} \end{bmatrix} \quad \text{bzw. den Zeilenvektoren} \quad \mathbf{d}_i^{*t} = \begin{cases} \mathbf{d}_i^t & \text{für } \delta_i = 0 \\ \mathbf{c}_i^t \mathbf{A}^{(\delta_i-1)} \mathbf{B} & \text{für } \delta_i > 0 \end{cases}$$

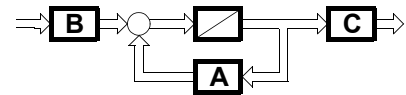
$i = 1, \dots, q$

Steuert man nun diese Ausgangsgleichung mit

$$\mathbf{u}(t) = -(\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{x}(t)$$

an, verschwindet

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{C}^* \mathbf{x}(t) - \mathbf{D}^* (\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$



Mit dieser Rückführung des Zustandsvektors werden die einzelnen Ausgänge  $y_i(t)$  unabhängig voneinander und damit entkoppelt. Vorausgesetzt ist dabei die Existenz der Inversen  $(\mathbf{D}^*)^{-1}$  **==> Entkoppelbarkeitsbedingung**

## 2. Schritt: Festlegung der Dynamik der Untersysteme

Im 1. Schritt wurden durch die Wahl der Stellgröße  $\mathbf{u}(t) = -(\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{x}(t)$  zunächst nur die Ausgänge entkoppelt ohne damit die Dynamik der entkoppelten Ausgangsunterssysteme zu beeinflussen. Um nun den einzelnen Ausgangsunterssysteme eine frei wählbare Dynamik verleihen zu können, wird die Stellgröße erweitert zu

$$\mathbf{u}(t) = \underbrace{- (\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{x}(t)}_{\mathbf{u}_E(t)} \quad \underbrace{- (\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{x}(t)}_{\mathbf{u}_D(t)}$$

Entkopplung Eigendynamik

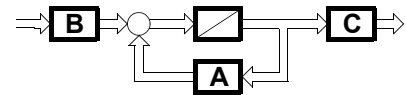
Die Eigendynamik der geregelten Ausgangsunterssysteme wird nun mit der Vorgabe der Polynomkoeffizienten  $\alpha_{ik}$  der gewünschten charakteristischen Polynome  $P_i(\lambda_{ik})$   $\delta_i$ -ter Ordnung der  $(q \times n)$ -Matrix

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^{*t} \\ \mathbf{m}_2^{*t} \\ \vdots \\ \mathbf{m}_q^{*t} \end{bmatrix} \quad \text{mit den Zeilenvektoren} \quad \mathbf{m}_i^{*t} = \begin{cases} \mathbf{0}^t & \text{für } \delta_i = 0 \\ \sum_{k=0}^{(\delta_i-1)} \alpha_{ik} \mathbf{c}_i^t \mathbf{A}^k & \text{für } \delta_i > 0 \end{cases}$$

festgelegt. Für jedes i-te Ausgangsunterssystem  $\delta_i$ -ter Ordnung sind also  $\delta_i$ -Eigenwerte  $\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,\delta_i}$  für das i-te charakteristische Polynom

$$P_i(\lambda) = \prod_{k=1}^{\delta_i} (\lambda - \lambda_{i,k}) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1} \cdot \lambda + \dots + \alpha_{i,\delta_i-1} \lambda^{\delta_i-1} + \lambda^{\delta_i}$$

vorzugeben.



### 3. Schritt: Bestimmung des Vorfilters

Das Vorfilter  $\mathbf{V}$  ist nun so zu bestimmen, dass die stationäre Führungsgenauigkeit jedes Ausgangs  $y_i(t)$  bei Vorgabe der jeweiligen Führungsgröße  $w_i(t)$  gewährleistet wird. Mit der  $(q \times q)$ -Diagonalmatrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_{qq} \end{bmatrix}$$

und der Erweiterung der Stellgröße

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \underbrace{-(\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{x}(t)}_{\mathbf{u}_E(t)} \underbrace{-(\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{x}(t)}_{\mathbf{u}_D(t)} + \underbrace{(\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{w}(t)}_{\mathbf{u}_F(t)} \\ &= - \underbrace{(\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{C}^* + (\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{M}^*}_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x}(t) + \underbrace{(\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{L}}_{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{w}(t) = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{V} \cdot \mathbf{w}(t) \end{aligned}$$

Entkopplung
Eigendynamik
Führungsgenauigkeit

lassen sich die Hauptdiagonalelemente der Matrix  $\mathbf{L}$  bestimmen. Mit der nun vollständigen Stellgröße ergibt sich für den  $i$ -ten Ausgang

$$\begin{aligned} \dot{y}_i^*(t) &= \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}^* [ -(\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{x}(t) - (\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{x}(t) + (\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{w}(t) ] = \\ &= -\mathbf{M}^* \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{L} \cdot \mathbf{w}(t) \end{aligned}$$

bzw. komponentenweise

$$y_i^{(\delta_i)} = -\mathbf{m}_i^* \cdot \mathbf{x}(t) + \mu_{ii} \cdot w_i(t)$$

Für den Fall  $\delta_i = 0$  gilt:  $y_i(t) = \mu_{ii} \cdot w_i(t) \implies$

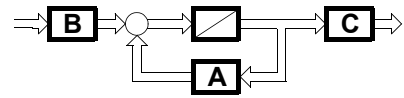
$\mu_{ii} = 1$

Wenn  $\delta_i > 0$  ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} y_i^{(\delta_i)}(t) &= - \left\{ \alpha_{i0} \mathbf{c}_i^t + \alpha_{i1} \mathbf{c}_i^t \mathbf{A} + \dots + \alpha_{i, \delta_i-1} \mathbf{c}_i^t \mathbf{A}^{\delta_i-1} \right\} \cdot \mathbf{x}(t) + \mu_{ii} \cdot w_i(t) = \\ &= -\alpha_{i0} \mathbf{c}_i^t \mathbf{x}(t) - \alpha_{i1} \mathbf{c}_i^t \mathbf{A} \mathbf{x}(t) - \dots - \alpha_{i, \delta_i-1} \mathbf{c}_i^t \mathbf{A}^{\delta_i-1} \mathbf{x}(t) + \mu_{ii} \cdot w_i(t) = \\ \implies y_i^{(\delta_i)}(t) + \alpha_{i, \delta_i-1} y_i^{(\delta_i-1)}(t) + \dots + \alpha_{i,1} \cdot \dot{y}_i(t) + \alpha_{i,0} \cdot y_i(t) &= \mu_{ii} \cdot w_i(t) \end{aligned}$$

Für diese Fälle wird der stationär genaue Zustand erreicht für

$\mu_{ii} = \alpha_{i,0}$



#### 4.4.2 Nichtlineare Ausgangsentkopplungsregelung im Zustandsraum

Ausgangspunkt der Reglersynthese: Nichtlineares Zustandsraum-Modell

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (\text{Zustandsvektordifferentialgleichung}),$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (\text{Ausgangsvektorgleichung}).$$

Zusätzliche formale Forderung: Lineare Ankopplung der Stellgröße

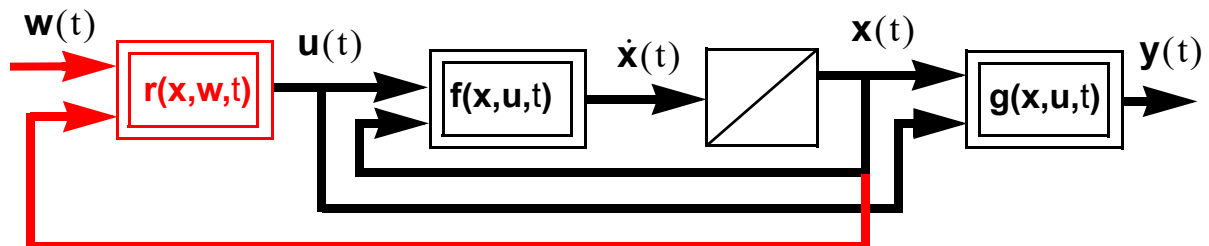
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(t) \quad ,$$

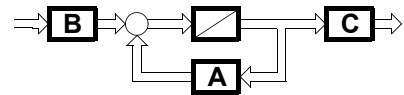
$$\mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(t)$$

**Ziel:** Nichtlinearer Regelvektor

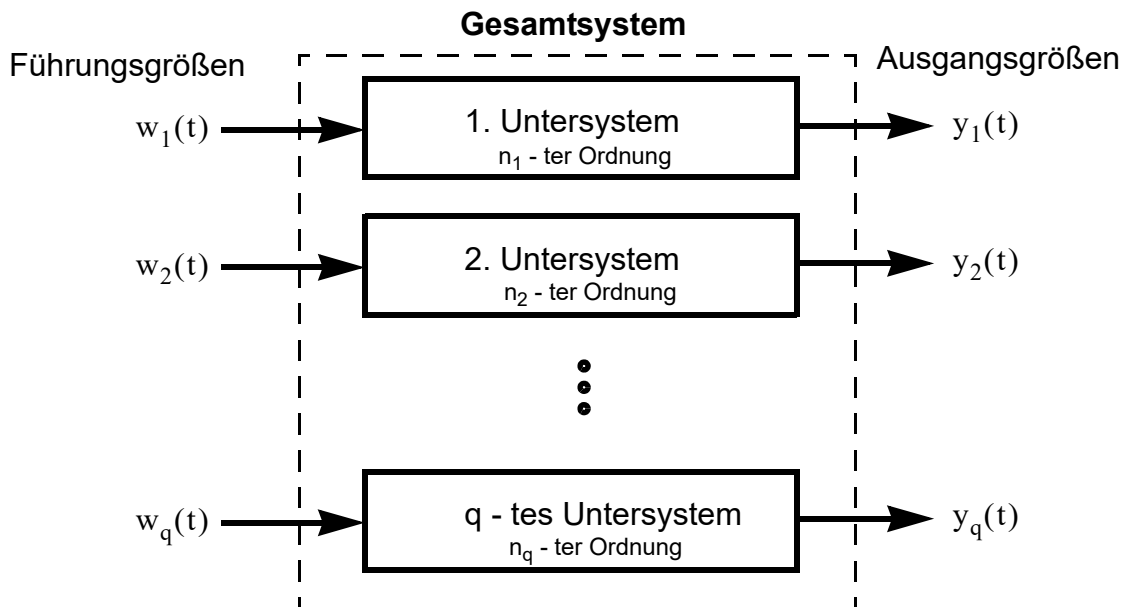
$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)$$

==> **Nichtlineares Mehrgrößen - Regelsystem**





Verhalten:  $q$  entkoppelte Untersysteme der Ausgänge mit jeweils frei wählbarer Eigendynamik



Die Bestimmung von  $r(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)$  erfolgt schrittweise.

### 1. Schritt: Entkopplung der Ausgänge durch Zustandsvektorrückführung

Existiert mit  $\mathbf{d}_i^t = \mathbf{0}^t$  kein Direktdurchgriff der Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  auf die einzelnen Ausgänge  $y_i(t)$  wird jeder Ausgang gemäß der Anwendung der Differentiationsregel

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)] + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)]\dot{\mathbf{x}}(t)$$

so oft differenziert bis erstmals die entsprechende Ableitung direkt vom Eingang beeinflusst wird. Die Ordnung der gefundenen Ableitung entspricht der Differenzordnung  $\delta_i$  des  $i$ -ten Ausganges  $y_i(t)$ .

Dieser Schritt verallgemeinert: Mehrfache Anwendung des Differentialoperators

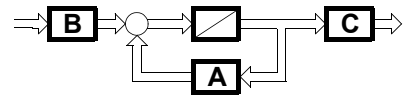
$$\mathbf{N}_A^k \mathbf{c}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N}_A^{k-1}(\mathbf{c}_i(\mathbf{x}, t)) + \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{N}_A^{k-1}(\mathbf{c}_i(\mathbf{x}, t)) \right]^T \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$$

mit dem Startwert

$$\mathbf{N}_A^0 \mathbf{c}_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{c}_i(\mathbf{x}, t)$$

auf die einzelnen Ausgänge.

==> Bildung eines neues Ausgangssystems mit Direktdurchgriff der Eingangsgröße



$$\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^{(\delta_1)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_q^{(\delta_q)} \end{bmatrix} = \mathbf{c}^*(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D}^*(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(t)$$

Entkopplung der Ausgänge  $y_i^*(t)$   $i = 1, \dots, q$  durch Wahl der Stellgröße:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}_E(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{D}^{*-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{c}^*(\mathbf{x}, t)$$

Ergebnis:

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{c}^*(\mathbf{x}, t) - \mathbf{D}^*(\mathbf{x}, t)\mathbf{D}^{*-1}(\mathbf{x}, t)\mathbf{c}^*(\mathbf{x}, t) = 0$$

**Entkoppelbarkeitsbedingung:**  $|\mathbf{D}^*| \neq 0 \implies \mathbf{D}^*$  invertierbar !!!

## 2. Schritt: Festlegung der Dynamik der Untersysteme

Im 1. Schritt: Stellgröße  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{D}^{*-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{c}^*(\mathbf{x}, t) \implies$  nur Ausgänge entkoppelt ohne die Dynamik der entkoppelten Ausgangsundersysteme zu beeinflussen.

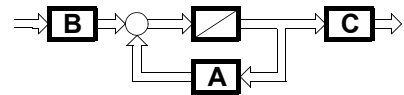
Frei wählbare Dynamik der einzelnen Ausgangsundersysteme durch die Erweiterung der Stellgröße

$$\mathbf{u}(t) = \underbrace{-\left(\mathbf{D}^*\right)^{-1} \cdot \mathbf{c}^*(\mathbf{x}, t)}_{\mathbf{u}_E(t)} \quad \underbrace{-\left(\mathbf{D}^*\right)^{-1} \cdot \mathbf{m}^*(\mathbf{x}, t)}_{\mathbf{u}_D(t)}$$

Entkopplung                      Eigendynamik

Eigendynamik der geregelten Ausgangsundersysteme festgelegt mit der Vorgabe der Polynomkoeffizienten  $\alpha_{ik}$  der gewünschten charakteristischen Polynome  $P_i(\lambda_{ik})$   $\delta_i$ -ter Ordnung im  $q$ -zeiligen Spaltenvektor:

$$\mathbf{m}^* = \begin{bmatrix} m_1^* \\ m_2^* \\ \vdots \\ m_q^* \end{bmatrix} \quad \text{mit Komponenten} \quad m_i^* = \begin{cases} 0 & \text{für } \delta_i = 0 \\ \sum_{k=0}^{(\delta_i-1)} \alpha_{ik} \mathbf{N}_A^k \mathbf{c}_i(\mathbf{x}, t) & \text{für } \delta_i > 0 \end{cases}$$



Für jedes i-te Ausgangssystem  $\delta_i$ -ter Ordnung sind also  $\delta_i$ - Eigenwerte  $\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,\delta_i}$  für das i-te charakteristische Polynom

$$P_i(\lambda) = \prod_{k=1}^{\delta_i} (\lambda - \lambda_{i,k}) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1} \cdot \lambda + \dots + \alpha_{i,\delta_i-1} \lambda^{\delta_i-1} + \lambda^{\delta_i}$$

vorzugeben.

### 3. Schritt: Bestimmung des Vorfilters für stationäre Genauigkeit

Stellgröße wird mit einem Term der Führungsgröße  $\mathbf{w}(t)$  und der  $(q \times q)$ -Diagonalmatrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_{qq} \end{bmatrix}$$

erweitert. Es ergibt sich für die Stellgröße:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \underbrace{- (\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{c}^*(\mathbf{x}, t)}_{\mathbf{u}_E(t)} \underbrace{- (\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{m}^*(\mathbf{x}, t)}_{\mathbf{u}_D(t)} + \underbrace{(\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{w}(t)}_{\mathbf{u}_F(t)} \\ &= - \underbrace{((\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{c}^* + (\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{m}^*(\mathbf{x}, t))}_{\mathbf{r}_x(t) = \mathbf{r}_E(t) + \mathbf{r}_D(t)} + \underbrace{(\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{L}}_{\mathbf{R}_F} \cdot \mathbf{w}(t) = -\mathbf{r}_x + (\mathbf{R}_F \cdot \mathbf{w}(t)) \end{aligned}$$

Entkopplung
Eigendynamik
Führungsgenauigkeit

==> Ausgangsgleichung mit der nun vollständigen Stellgröße:

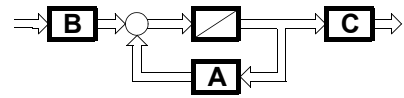
$$\begin{aligned} \mathbf{y}^*(t) &= \mathbf{c}^* + \mathbf{D}^* [ - (\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{c}^* - (\mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{m}^* + (\mathbf{D}^*)^{-1} \mathbf{L} \cdot \mathbf{w}(t) ] = \\ &= - \mathbf{m}^*(\mathbf{x}, t) + \mathbf{L} \cdot \mathbf{w}(t) \end{aligned}$$

Es entsteht das entkoppelte Übertragungsdifferentialgleichungssystem

$$y_1^{(\delta_1)}(t) = \mathbf{N}_A^{\delta_1} \mathbf{c}_1(\mathbf{x}, t) + \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{N}_A^{k-1}(\mathbf{c}_1(\mathbf{x}, t)) \right]^T \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(t)$$

- 
-





$$y_q^{(\delta_q)}(t) = N_A^{\delta_1} c_q(x, t) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} N_A^{q-1}(c_q(x, t)) \right]^T B(x, t) \cdot u(t)$$

bzw.

$$y_1^{(\delta_1)}(t) + \alpha_{1(\delta_q-1)} \cdot y_1^{(\delta_1-1)}(t) + \dots + \alpha_{11} \cdot \dot{y}_1(t) + \alpha_{10} \cdot y_1(t) = \mu_{11} \cdot w_1(t)$$

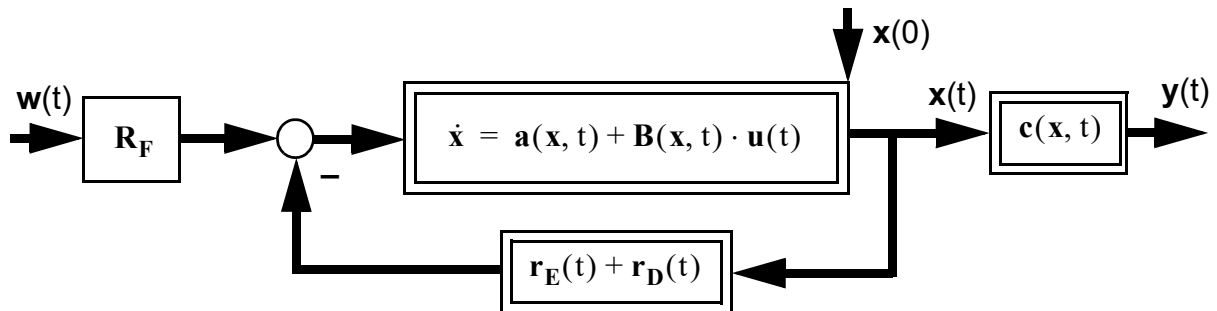
•  
•

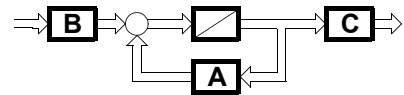
$$y_q^{(\delta_q)}(t) + \alpha_{q(\delta_q-1)} \cdot y_q^{(\delta_q-1)}(t) + \dots + \alpha_{q1} \cdot \dot{y}_q(t) + \alpha_{q0} \cdot y_q(t) = \mu_{qq} \cdot w_q(t).$$

Stationär genauer Zustand  $y = w$  stellt sich ein unter der Bedingung:

$$\mu_{ii} = \alpha_{i0} \quad i = 1, \dots, q$$

Strukturelle Darstellung des nichtlineare Entkopplungsentwurf





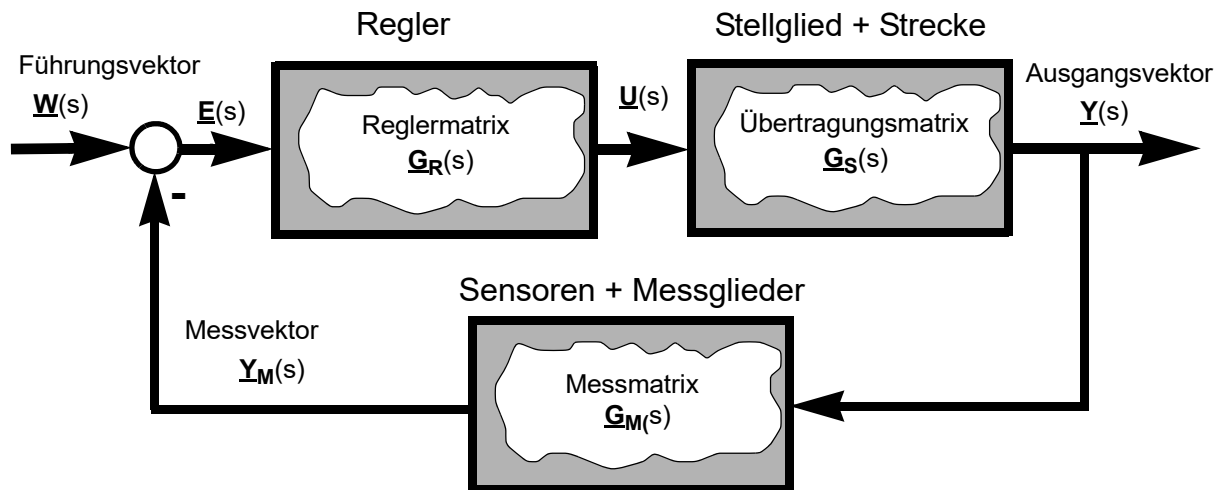
### 4.4.3 Ausgangsentkopplung mit Übertragungsmatrix (Frequenzbereich)

Annahme: keine messbaren Störgrößen vorhanden ( $\underline{Z}(s) = \mathbf{0}$ )

Aus dem Übertragungsmodell der offenen Mehrgrößenregelstrecke im Frequenzbereich

: 
$$\underline{Y}(s) = \underline{G}_S \cdot \underline{U}(s)$$

wird für Regelung die klassische Struktur des **Standardregelkreises** .



aber mit Mehrgrößenwirkungslinien (fette Wirkungslinien) gewählt.

Mit der Stellgröße:

$$\underline{U}(s) = \underbrace{\underline{G}_R(s)}_{\text{Reglermatrix}} \cdot \underline{E}(s) = \underline{G}_R(s) \cdot [\underbrace{\underline{W}(s) - \underline{G}_M(s) \cdot \underline{Y}(s)}_{\text{Messmatrix}}]$$

==> Ausgang:

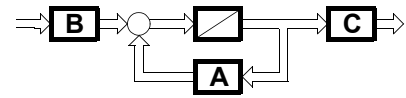
$$\underline{Y}(s) = \left[ \underline{G}_S(s) \cdot \underline{G}_R(s) \cdot \left( \underbrace{\underline{I}}_{\text{Einheitsmatrix}} + \underbrace{\underline{G}_M(s) \cdot \underline{G}_S(s) \cdot \underline{G}_R(s)}_{\underline{G}_0(s) \text{ Übertragungsmatrix des offenen Regelkreises}} \right)^{-1} \right] \cdot \underline{W}(s)$$

$$= \underline{G}_W(s) \cdot \underline{W}(s)$$

==> Daraus ergibt sich die Führungsübertragungsmatrix

$$\underline{G}_W(s) = \underline{G}_S(s) \cdot \underline{G}_R(s) \cdot (\underline{I} + \underline{G}_M(s) \cdot \underline{G}_S(s) \cdot \underline{G}_R(s))^{-1}$$

mit den Regelkreisübertragungsmatrizen (ausführlich) und den entsprechenden Übertragungsfunktionen als Matrizenelemente mit den jeweiligen Zeilenindizes (1.Index) und Spaltenindizes (2.Index)

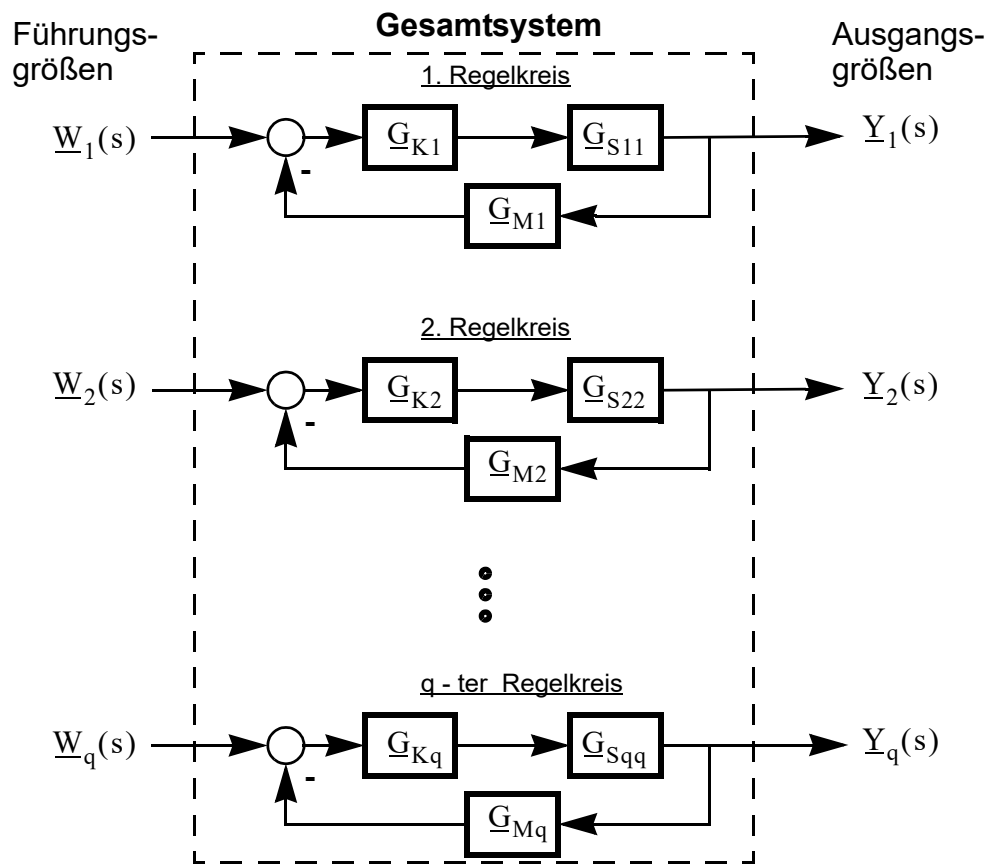
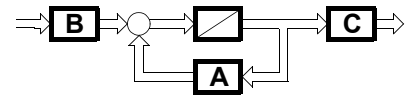


$$\underline{G}_R(s) = \begin{bmatrix} \underline{G}_{R11} & \underline{G}_{R12} & \dots & \underline{G}_{R1q} \\ \underline{G}_{R21} & \underline{G}_{R22} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \underline{G}_{Rp1} & \cdot & \dots & \underline{G}_{Rpq} \end{bmatrix}, \quad \underline{G}_S(s) = \begin{bmatrix} \underline{G}_{S11} & \underline{G}_{S12} & \dots & \underline{G}_{S1p} \\ \underline{G}_{S21} & \underline{G}_{S22} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \underline{G}_{Sq1} & \cdot & \dots & \underline{G}_{Sqp} \end{bmatrix},$$

$$\underline{G}_M(s) = \begin{bmatrix} \underline{G}_{M1} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \underline{G}_{M2} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \underline{G}_{M3} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \underline{G}_{Mq} \end{bmatrix}.$$

Da die Messrößen im allgemeinen nicht miteinander gekoppelt sind, ist die Messmatrix  $\underline{G}_M(s)$  nur in der Hauptdiagonalen mit den Übertragungsfunktionen der  $q$  Messgrößen besetzt.

**Ziel** der Regelung: Wahl der Reglerübertragungsmatrix  $\underline{G}_R(s)$  so, dass die einzelnen Ausgänge  $\underline{Y}_i(s)$ ,  $i = 1 \dots q$  entkoppelt sind und sich jeweils nur über die entsprechende Führungsgröße  $\underline{W}_i(s)$  beeinflussen lassen. Es entsteht dann das folgende **entkoppelte** Gesamtsystem aus unabhängigen Standardregelkreisen.



Die Bestimmung von  $\underline{G}_R(s)$  erfolgt schrittweise.

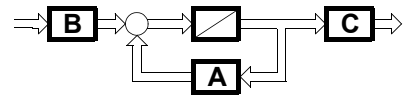
**1. Schritt:**

Entkopplung der Ausgänge durch inversen Übertragungsmatrix  $\underline{G}_S(s)^{-1}$

Voraussetzung:  $p = q$  Anzahl der Ein- und Ausgänge ist gleich.  $\implies \underline{G}_S(s)$  ist quadratisch.

Für  $\underline{G}_R(s) = \underline{G}_S(s)^{-1}$  ergibt sich im Vorwärtszweig der Regelung

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{\underline{G}_S(s) \cdot \underline{G}_S(s)^{-1}}_{\substack{\mathbf{I} \\ \text{Einheitsmatrix}}} \cdot \mathbf{E}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}(s)$$



sofern die Inverse  $\underline{G}_S(s)^{-1}$  existiert. Das Streckenmodell ist damit entkoppelt. Die Ausgänge sind also über die Regelabweichungen am Reglereingang getrennt ansprechbar

## 2. Schritt:

**Führungsverhalten der Ausgänge durch Diagonalmatrix  $\underline{G}_D(s)$  festlegen**

Wird nun die Reglermatrix  $\underline{G}_R(s)$  mit der Diagonalmatrix  $\underline{G}_D(s)$ , die in der Hauptdiagonalen die Übertragungsfunktionen der Hauptdiagonalen  $\underline{G}_{Sii}$ ,  $i = 1 \dots q$  der Streckenübertragungsmatrix enthält, erweitert

$$\underline{G}_R(s) = \underline{G}_S(s)^{-1} \cdot \underline{G}_D(s) = \underline{G}_S(s)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{G}_{S11} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \underline{G}_{S22} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \underline{G}_{S33} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \underline{G}_{Sqq} \end{bmatrix}$$

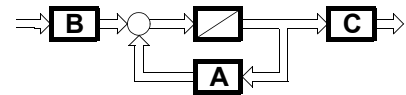
so besitzt nun jeder Ausgang das Streckenverhalten der Hauptdiagonalen-Übertragungsfunktionen der Übertragungsmatrix des unregulierten Systems.

## 3. Schritt:

**Entwurf des Reglers für jeden entkoppelten Unterregelkreis mit  $\underline{G}_K(s)$**

Es wird nun die Reglermatrix  $\underline{G}_R(s)$  mit der Diagonalmatrix  $\underline{G}_K(s)$ , die in der Hauptdiagonalen die Übertragungsfunktionen  $\underline{G}_{Ki}$ ,  $i = 1 \dots q$  eines für jeden Regelkreis auszuwählenden Standardreglers (P-, PI-, PD- oder PID-Regler) enthält, erweitert

$$\underline{G}_R(s) = \underline{G}_S(s)^{-1} \cdot \underline{G}_D(s) \cdot \underline{G}_K(s) = \underline{G}_S(s)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{G}_{S11} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \underline{G}_{S22} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \underline{G}_{S33} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \underline{G}_{Sqq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{G}_{K1} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \underline{G}_{K2} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \underline{G}_{K3} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \underline{G}_{Kq} \end{bmatrix}$$



so kann nun für jeden Unterregelkreis die gewünschte Dynamik der jeweiligen Führungsübertragungsfunktion festgelegt werden. Die entstehende Führungsübertragungsmatrix  $\underline{G}_W(s)$  wird hier bei der Entkopplungsregelung im speziellen nur noch in der Hauptdiagonalen mit den Führungsübertragungsfunktionen  $\underline{G}_{Wi}$   $i = 1 \dots q$  jedes Unterregelkreises besetzt sein. Das entkopplungsgeregelte Gesamtsystem kann dann mit dem folgende Gesamtregelverhalten

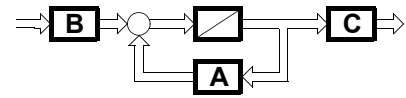
$$\underline{Y}(s) = \underline{G}_W(s) \cdot \underline{W}(s) = \begin{bmatrix} \underline{G}_{W1} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \underline{G}_{W2} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \underline{G}_{W3} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \underline{G}_{Wq} \end{bmatrix} \cdot \underline{W}(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\underline{G}_{K1} \cdot \underline{G}_{S11}}{1 + \underline{G}_{K1} \cdot \underline{G}_{S11} \cdot \underline{G}_{M1}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{\underline{G}_{K2} \cdot \underline{G}_{S22}}{1 + \underline{G}_{K2} \cdot \underline{G}_{S22} \cdot \underline{G}_{M2}} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \frac{\underline{G}_{Kq} \cdot \underline{G}_{Sq q}}{1 + \underline{G}_{Kq} \cdot \underline{G}_{Sq q} \cdot \underline{G}_{M1}} \end{bmatrix} \cdot \underline{W}(s)$$

geschlossen zusammengefasst werden. Jeder Unterregelkreis kann für sich durch Optimierung der zugehörigen Reglerparameter in seiner Dynamik nach gewünschten Vorgaben getrennt eingestellt werden.

## Realisierungsprobleme der Entkopplungsregelung

- Bei der Invertierung der Streckenübertragungsmatrix entstehen in der Regel Zählerzeitkonstanten bzw. Zählerpolynome höherer Ordnung die im Zeitbereich durch das D-Verhalten (evtl. mehrfach) zu nicht beherrschbaren Störempfindlichkeit führt. Häufig genügt auch schon eine stationäre Entkopplung, bei der dieses Problem nicht mehr auftritt
- Bei vorhanden Totzeiten können nichtkausale Entkopplungsterme (positive Totzeiten) entstehen, die grundsätzlich nicht realisierbar sind.



## 5 Simulation

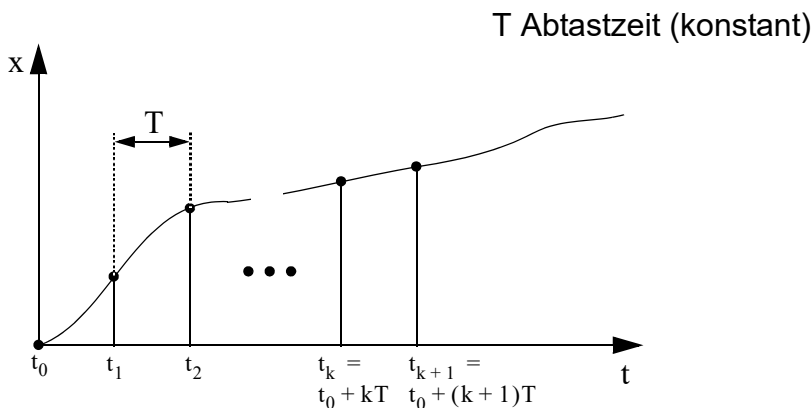
### 5.1 Abtastsysteme

Warum der Übergang zum Abtastsystem?

- > Simulation auf Digitalrechner
- > Echtzeitrealisierung der Regelalgorithmen

Abtastung des kontinuierlichen Verlaufes an diskreten Zeitpunkten mit konstanten Zeitintervallen

(Diskretisierung --> Digitale Regelung, Abtastregelung)



--> Annäherung des Verlaufes durch Werte Reihe  $x(t_0)$ ,  $x(t_0 + T)$ ,  $x(t_0 + 2 \cdot T)$ , ...

Aus der kontinuierlichen Lösung folgt für die diskrete Berechnung zu äquidistanten Zeitpunkten  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = t_0 + T$ ,  $t_2 = t_0 + 2 \cdot T = t_1 + T$ , ... mit  $t - t_0 = T$  und

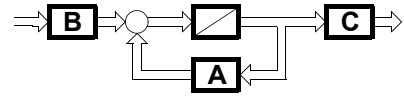
$u[k \cdot T] = \text{konstant}$  im Abtastintervall  $[k \cdot T, (k + 1) \cdot T]$

$$x[t_1 = T] = e^{A \cdot T} \cdot x[t_0] + \int_0^T (e^{A \cdot [T - \tau]} \cdot B \cdot u(\tau)) d\tau$$

$$x[t_2 = 2T] = e^{A \cdot T} \cdot x[T] + \int_0^{2T} (e^{A \cdot [2T - \tau]} \cdot B \cdot u(\tau)) d\tau$$

...

$$x[(k + 1)T] = e^{A \cdot T} \cdot x[kT] + \int_0^{(k + 1)T} (e^{A \cdot [(k + 1)T - \tau]} \cdot B \cdot u(\tau)) d\tau \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



mit der Substitution  $\Theta = \tau - k \cdot T$

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A} \cdot T} \cdot \mathbf{x}[kT] + e^{\mathbf{A} \cdot T} \cdot \int_0^T (e^{\mathbf{A} \cdot \Theta} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(kT + \Theta)) d\Theta$$

Da  $\mathbf{u}(kT + \Theta) = \mathbf{u}(kT)$  für  $0 \leq \Theta < T$  innerhalb der Taktzeit konstant, kann das Integral berechnet werden. Es ergibt sich:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A} \cdot T} \cdot \mathbf{x}[kT] + e^{\mathbf{A} \cdot T} \cdot (\mathbf{I} - e^{-\mathbf{A} \cdot T}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}[kT]$$

oder in Kurzschreibweise

$$\mathbf{x}[k+1] = e^{\mathbf{A} \cdot T} \cdot \mathbf{x}[k] + (e^{\mathbf{A} \cdot T} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}[k]$$

bzw. in der Matrizen Schreibweise:

### Diskrete Zustandsdarstellung

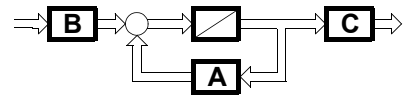
$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}[k]$	$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A} \cdot T} = \theta(T)$	diskrete Systemmatrix
	$\mathbf{G} = (e^{\mathbf{A} \cdot T} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$	diskrete Eingangsmatrix
$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}[k]$	$\mathbf{C}$ Ausgangsmatrix (identisch kontinuierlich)	
	$\mathbf{D}$ Durchgriffsmatrix (identisch kontinuierlich)	

Für zeitinvariante Systeme ist  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{G}$  für eine konstante Abtastzeit durch konvergente Reihenentwicklung näherungsweise berechenbar.

Wie Abtastzeit wählen?

In Praxis gute Ergebnisse erzielbar, wenn  $T$  kleiner als das 0,1-fache der kleinsten Systemzeitkonstanten





## 5.2 Testfunktionen

### Impulsantwort

Eingang:  $u(t) = \delta(t)$

$$\underline{U}(s) = L\{\delta(t)\} = 1$$

$$\rightarrow \underline{Y}(s) = \underline{G}(s) \cdot 1$$

Rücktransformation

Ausgang:  $y(t) = \underbrace{g(t)}_{\text{Gewichtsfunktion}}$

### Sprungantwort

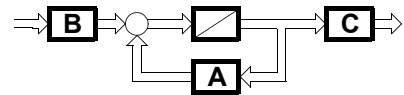
Eingang:  $u(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$

$$\underline{U}(s) = L\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow \underline{Y}(s) = \underline{G}(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Rücktransformation

Ausgang:  $y(t) = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau$



# 1 Anhang

## 1.1 Abkürzungen

n	Systemordnung
p	Anzahl der Eingänge
q	Anzahl der Ausgänge
t	Zeitvariable
T	Abtastzeit

Matrizen	Große <b>BUCHSTABEN</b> in Fettdruck
Vektoren	kleine <b>buchstaben</b> in Fettdruck (immer Spaltenvektor)

$(\dots)^T$  Transponierte Größen (z.B.  $c^T$  Zeilenvektor)

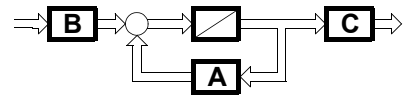
$(\underline{\dots})$  Komplexe Größen

$(\dots)^{(n)}$  n-te zeitliche Ableitung

$(\dots)^{-1}$  Inverse

<b>A</b>	$(n \times n)$ - Systemmatrix (kontinuierlich)
<b>B</b>	$(n \times p)$ - Eingangsmatrix (kontinuierlich)
<b>C</b>	$(q \times n)$ - Ausgangsmatrix
<b>D</b>	$(q \times p)$ - Durchgangsmatrix
<b>F</b>	$(n \times n)$ - Systemmatrix (diskret)
<b>G</b>	$(n \times p)$ - Eingangsmatrix (diskret)
<b>L</b>	Beobachtermatrix
<b>T</b>	Transformationsmatrix
<b>Q</b>	Zustands - Gewichtungsmatrix
<b>Q<sub>B</sub></b>	Beobachtbarkeitsmatrix
<b>Q<sub>S</sub></b>	Steuerbarkeitsmatrix
<b>R</b>	Regelungsmatrix
<b>S</b>	Eingangs - Gewichtungsmatrix

<b>b</b>	Eingangsvektor
<b>c<sup>T</sup></b>	Ausgangszeilenvektor
<b>l</b>	Beobachtervektor
<b>r<sup>T</sup></b>	Regelungszeilenvektor
<b>x(t)</b>	Zustandsgrößenvektor
<b>y(t)</b>	Ausgangsgrößenvektor
<b>u(t)</b>	Eingangsgrößenvektor



## 1.2 Literatur

- [1] Föllinger, O.                    Regelungstechnik 6. Auflage  
Heidelberg: Hüttig, 6. Auflage, 1990
  
- [2] Freund, E.                        Regelsysteme im Zustandsraum I  
Regelsysteme im Zustandsraum II  
München: Oldenburg Verlag, 1987
  
- [3] Unbehauen R.                    Systemtheorie  
München: Oldenburg Verlag, 4. Auflage, 1983
  
- [4] Roppenecker, G.                Zeitbereichsentwurf linearer Regelungen  
München: Oldenburg Verlag, 1990
  
- [5] Isermann, R.                    Digitale Regelsysteme  
Berlin: Springer Verlag, 2. Auflage, 1987
  
- [6] Ackermann, J.                    Abtastregelung  
Berlin: Springer Verlag, 3. Auflage, 1988